3. Un dron es troba en el punt $P=(2,-3,1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?
[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Solució:

a) La trajectòria que ha de seguir el dron és la recta que passa pel punt $P=(2,-3,1)$ i té vector director perpendicular al pla $\pi: 3x+4z+15=0$. El vector director serà $v_r=(A,B,C)=(3,0,4)$. Per tant, en forma paramètrica

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3 \qquad t\in\mathbf{R} \\ z=1+4t \end{cases}$$

La distància que ha de recórrer és:

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 2+0\cdot(-3)+4\cdot 1+15|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5u$$

b) Cal trobar el punt d'intersecció de la recta amb el pla:

$$\begin{cases} (x,y,z)=(2+3t,-3,1+4t) \\ \pi: 3x+4z+15=0 \end{cases} \rightarrow 3(2+3t)+4(1+4t)+15=0 \rightarrow t=-1$$

Així, el punt buscat és $(-1,-3,-3)$.

2. Siguin la recta r: $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.

   a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r.
   [1 punt]

   b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π.
   [1 punt]

   Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Solució:

- La recta que es demana té vector director $n = (1,0,-1)$ i passa pel punt d'intersecció de r i π. Busquem el punt de la rectaz r,$P_r = (2,1+\lambda,\lambda)$, substituint-lo a l'equació del pla : $2-\lambda-3=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1$.
El punt de la recta és (2, 0, -1)

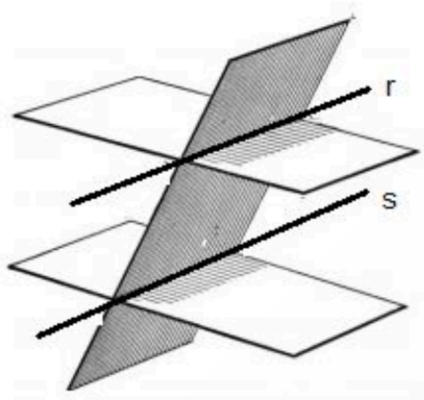
Per tant, l'equació paramètrica de la recta buscada serà: $\left.\begin{array}{l} x=2+\mu \\ y=0 \\ z=-1-\mu \end{array}\right\}$

- Busquem els punts de r tals que $d(P_r,\pi) = \sqrt{8}$.

$$d(P_r,\pi) = \frac{|2-\lambda-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|-1-\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \Rightarrow |-1-\lambda| = 4 \Rightarrow \lambda = -5 \ o \ \lambda = 3$$

$\boxed{\text{Per tant els punts són (2, -4, -5) i (2, 4, 3).}}$

5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5, \pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.
   a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt. [1 punt]
   b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:



[1 punt]

Solució:

a) Perquè els tres plans es tallin en un punt la matriu del sistema format per les tres equacions ha de ser compatible determinat. Cal que la matriu M del sistema tingui rang 3. Llavors la matriu ampliada també tindrà rang 3 i per tant el sistema serà compatible determinat.

$$M = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a(a+1) + 2a + a + 1 - 2a - 2(a+1) - a(a+1)$$
$$= 2a^2 + 2a + 2a + a + 1 - 2a - 2a - 2 - a^2 - a = a^2 - 1$$

rang M = 3 quan $a^2 - 1 \neq 0$, és a dir $a \neq \pm 1$. En aquests casos els tres plans es tallen en un punt.

b) La situació representada mostra dos plans paral·lels i un altre que els talla.

En el cas a =1 tenim:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ En aquest cas els plans π_2 i π_3 són paral·lels i diferents ja que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

i no paral.lels amb el pla π_1 perqué

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

per tant, el pla π_1 els tallarà de manera que s'obtindrà, efectivament, la situació geomètrica de la figura.