4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$ en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica amb abscissa $x = 2$
[2,5 punts]

Solució:

Plantegem el límit per calcular el pendent de l'asímptota obliqua i l'igualem a 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(a + \frac{b}{x^2}\right) = \boxed{a=1}$$

Així, la funció serà $f(x) = \frac{x^2+b}{x}$.

Perquè tingui un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$, cal que la derivada s'anul·li en aquest punt:

$$f'(x) = \frac{2x^2-(x^2+b)}{x^2} = \frac{x^2-b}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{4-b}{4} = 0 \rightarrow \boxed{b=4}.$$

Finalment, confirmem que es tracta d'un mínim en $x = 2$ ja que:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \begin{cases} >0 & \text{si } x < -2 \rightarrow \quad f \text{ creixent} \\ \leq 0 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \rightarrow \quad f \text{ decreixent} \\ >0 & \text{si } x > 2 \rightarrow \quad f \text{ creixent} \end{cases}$$

I, per tant, en el punt d'abscissa $x = 2$, la funció passa de decreixent a creixent i, per tant, presenta un mínim.

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 punts]

Solució:

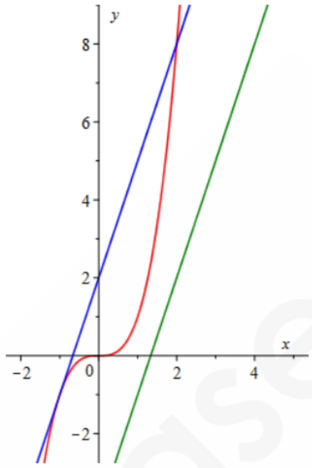
a) El pendent de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ és $f'(a)$, que ha de ser igual al pendent de la recta $y = 3x - 4$, que és 3. Per tant,

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(a) = 3a^2 = 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Així, el punt buscat és $(-1, f(-1)) = \boxed{(-1,-1)}$ ja que ha de ser del tercer quadrant.

La recta tangent en aquest punt és:

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$



b) Per a calcular l'àrea compresa entre $y = x^3$ i $y = 3x + 2$, hem de calcular els seus punts de tall:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Pel mètode de Ruffini es descompon el polinomi en factors primers i tenim:

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ i } x = 2$$

Així, l'àrea demanada es calcula amb la integral definida:

$$\int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)dx = \left[3\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$$

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$ i l'eix de les abscisses.
[1,25 punts]

Solució:

a) Si la recta tangent és horitzontal (f'(x)=0), aleshores:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \quad \rightarrow \quad 1-\ln x=0 \quad \rightarrow \ln x=1 \quad \rightarrow x=e$$

El punt demanat serà $\boxed{\left(e, \frac{1}{e}\right)}$

Per determinar si és un extrem relatiu podem utilitzar el criteri de la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f''(e)=\frac{-3+2\ln e}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$ i per tant es tracta d'un $\boxed{\text{Màxim relatiu}}$.

b) Com que la funció *f*(*x*) és positiva per a $x>1$, l'àrea (A) que es busca serà el resultat d'integrar:

$$A=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}lnx\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}u^2}.$$

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

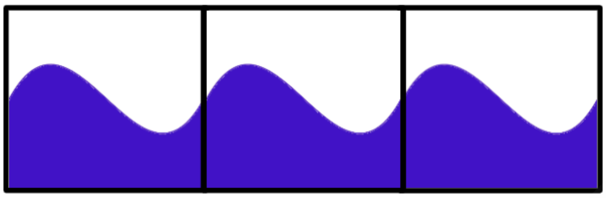


Figura 1

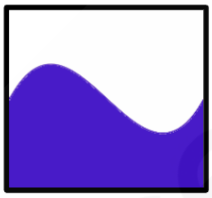


Figura 2

Per a fer-ho l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0,0), (0,2), (2,0) i (2,2), tal com mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

Solució:

a) Sabent que, pel fet de ser un polinomi, la funció *f(x)* és contínua a tota la recta real, i per tant la continuïtat gràfica de les juntes queda provada només veient que $\boxed{f(0) = 1 = f(2)}$,

De manera anàloga, *f(x)* és derivable –i amb derivada contínua- a tota la recta real i la junta serà derivable sempre que el pendent en que s'hi arribi, $f'(2)$, sigui el mateix que el pendent amb què en sortim, $f'(0)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \boxed{2}$$

b) Per a comprovar que les àrees són idèntiques cal utilitzar la integral definida:
$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + x\right]_0^2 = \frac{1}{4}2^4 - 2^3 + 2^2 + 2 = 2\ dm^2$
com que l'àrea de la rajola és $A = 2 \cdot 2 = 4\ dm^2$ queda clar que la funció la divideix en dues parts d'igual superfície.