

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]

Buscatusclases



Solució:

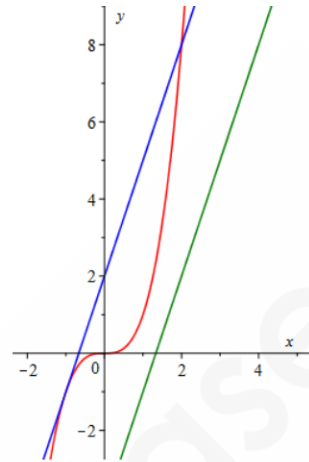
- a) El pendent de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ és $f'(a)$, que ha de ser igual al pendent de la recta $y = 3x - 4$, que és 3. Per tant,

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(a) = 3a^2 = 3 \rightarrow \\ \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Així, el punt buscat és $(-1, f(-1)) = \boxed{(-1, -1)}$ ja que ha de ser del tercer quadrant.

La recta tangent en aquest punt és:

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) \rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$



- b) Per a calcular l'àrea compresa entre $y = x^3$ i $y = 3x + 2$, hem de calcular els seus punts de tall:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Pel mètode de Ruffini es descompon el polinomi en factors primers i tenim:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ i } x = 2$$

Així, l'àrea demanada es calcula amb la integral definida:

$$\int_{-1}^2 (3x + 2 - x^3) dx = \left[3 \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 = \boxed{\frac{27}{4} u^2}$$

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què \ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.
- a)* Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
[1,25 punts]
- b)* Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = e$ i l'eix de les abscisses.
[1,25 punts]

Solució:

a) Si la recta tangent és horitzontal ($f'(x)=0$), aleshores:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

El punt demanat serà $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

Per determinar si és un extrem relatiu podem utilitzar el criteri de la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2 \ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \text{ i per tant es tracta d'un } \boxed{\text{Màxim relatiu}}.$$

b) Com que la funció $f(x)$ és positiva per a $x > 1$, l'àrea (A) que es busca serà el resultat d'integrar:

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} u^2}.$$

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

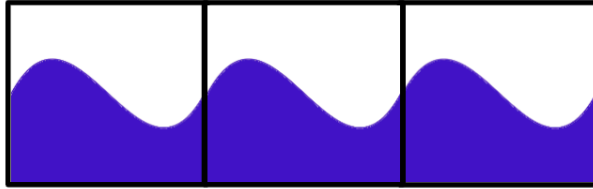


Figura 1

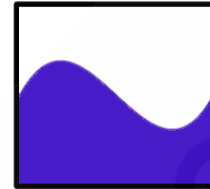


Figura 2

Per a fer-ho l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ i $(2,2)$, tal com mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

- a)* Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]
- b)* Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

Solució:

a) Sabent que, pel fet de ser un polinomi, la funció $f(x)$ és contínua a tota la recta real, i per tant la continuïtat gràfica de les juntes queda provada només veient que $f(0) = 1 = f(2)$,

De manera anàloga, $f(x)$ és derivable –i amb derivada contínua– a tota la recta real i la junta serà derivable sempre que el pendent en que s’hi arriba, $f'(2)$, sigui el mateix que el pendent amb què en sortim, $f'(0)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \boxed{2}$$

b) Per a comprovar que les àrees són idèntiques cal utilitzar la integral definida:

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + x \right]_0^2 = \frac{1}{4}2^4 - 2^3 + 2^2 + 2 = 2 \text{ dm}^2$$

com que l'àrea de la rajola és $A = 2 \cdot 2 = 4 \text{ dm}^2$ queda clar que la funció la divideix en dues parts d'igual superfície.