2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.
[1,25 punts]

Solució:

a) Escrivim el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{array}\right)$$

Denotem per a A i A^* la matriu dels coeficients i l'ampliada, respectivament.

El determinant de la matriu A del sistema és:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 6k - 40$$

Si igualem el determinant a 0 obtenim:

$$k^2 - 6k - 40 = 0 \to k = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} \Longrightarrow k = 10; k = -4$$

Aleshores, podem considerar els següents tres casos:

- Si $k \neq 10, -4 \to \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \to$ Sistema compatible determinat.
- Si $k = 10$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible.

Observació: El rang es pot justificar amb menors no nuls o bé directament es pot concloure la incompatibilitat a partir de la segona equació.

- Si $k = -4$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 7 & 28 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) <$ núm. incògnites $= 3 \to$ Sistema compatible indeterminat amb 1 (=3-2) grau de llibertat (les solucions depenen d'un paràmetre lliure).

b) Per a $k = 0$, estem en el primer cas i sabem que es tracta d'un sistema compatible determinat, té solució única:

El sistema queda:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

Resolent el sistema per Gauss, o bé per Cràmer, obtenim la solució $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 18 \\ z = -1 \end{cases}}$

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

   a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$ en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
   [1,25 punts]

   b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
   [1,25 punts]

Solució:

a) La matriu incògnita X ha de ser quadrada d'ordre 2, en cas contrari no es podria operar l'equació donada. Aïllem X de la igualtat donada:

$$AX = I - 3X \rightarrow AX + 3X = I \rightarrow (A + 3I)X = I \rightarrow X = (A + 3I)^{-1}$$

Així ja podem calcular la matriu X:

$$X = (A+3I)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) De la igualtat $(A + 3I)X = I$ podem deduir directament que la matriu X és invertible i que $A + 3I$ és la matriu inversa de la matriu X, així doncs:

$$X^{-1} = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

De forma alternativa, $\det(X) = -4 - (-3) = -1 \neq 0$ i, per tant, X és invertible i la matriu inversa serà:

$$X^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

1. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a.
   [1,25 punts]

   b) Comproveu que $\det(A^2 + A) = 0$.
   [1,25 punts]

Solució:

a) Discutirem el rang a partir de quan el rang pugui ser màxim (3 en aquest cas), que es correspon amb quan el determinant de la matriu és no nul. Comencem calculant $det(A)$ fent la transformació $F2 \rightarrow F2 - F1$, on F1 i F2 denoten les files 1 i 2 respectivament de la matriu A. Tenim

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a - 1.$$

Per tant l'únic valor per al qual la matriu no té rang 3 és $a = 1$. En aquest cas veiem clarament que té rang 2 ja que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Per tant tenim:

$a \neq 1$, aleshores $rang(A) = 3$.
$a = 1$, aleshores $rang(A) = 2$.

b) Tenim

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

i per tant $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{pmatrix}$.

Veiem clarament que $\det(A^2 + A) = 0$ ja que $F1 = 2 \cdot F2$ on $F1, F2$ denoten respectivament les files 1 i 2 de la matriu $A^2 + A$.

De forma alternativa es pot calcular el determinant de la matriu i obtenim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{vmatrix} = 2a(2+a) + 6a + 6a^2 - 6a^2 - 6a - 2a(2+a) = 0.$$

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1,25 punts]

Solució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

Mirem quan det(A) = 0 per tal que el rang no sigui màxim:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a = a(a-2)$$

Que s'anul·la per $a = 0$ i $a = 2$.

Així doncs tenim els següents tres casos:

- $Si\ a \neq 0\ i\ a \neq 2\ \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A') \Rightarrow SCD$

- Si $a = 0$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc volem calcular el rang(A).
Com que det(A) = 0 i el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang(A)=2.

Ara volem calcular el rang(A'). Com que la 1a i la 3a columna són iguals, tots els menors que les continguin seran nuls. Ens queda calcular el determinant amb les altres tres columnes:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, rang(A') = 2

Aleshores tenim que rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = nº d'equacions. Per tant és un SCI amb 1 (3-2) grau de llibertat.

- Si $a = 2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

En aquest cas veiem que la segona i la tercera fila, tant de la matriu A com de la matriu ampliada són iguals entre elles i diferents a la primera, per tant tenim que rang(A) = rang(A') = 2 < 3= nº d'equacions. Per tant és un SCI amb 1 (3-2) grau de llibertat.

b) S'ha de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Com que la segona i la tercera equació són la mateixa, aleshores la podem eliminar i hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

I serà un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
Si escollint $x = \lambda$ com a paràmetre lliure, obtenim que la solució, després de substituir i aïlla a la primera equació i anàlogament a la segona, és: $\boxed{(\lambda, -2\lambda+2, 3\lambda+1)}$