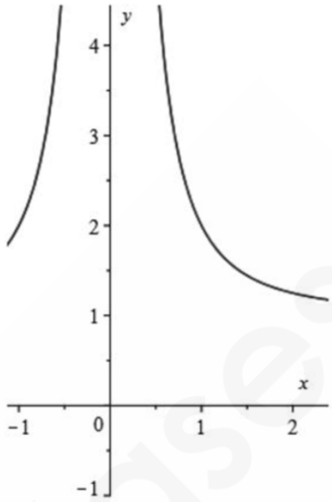
1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



***a*)** Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

***b*)** En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.
[1,25 punts]

Solució:

a) La recta tangent a $y = f(x)$ en el punt d'abscisses $x = a$ és

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Com que $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$, l'equació de la recta tangent és

$$y = \frac{-2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2} + 1 \rightarrow y = \frac{-2}{a^3}x + \frac{a^2+3}{a^2}.$$

Els vèrtexs del triangle seran l'origen de coordenades i els talls de la recta tangent amb els eixos, que són:

Tall amb $x = 0 \rightarrow y = \frac{a^2+3}{a^2} \rightarrow \left(0, \frac{a^2+3}{a^2}\right)$

Tall amb $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-2}{a^3}x + \frac{a^2+3}{a^2} \rightarrow x = \frac{a(a^2+3)}{2} \rightarrow \left(\frac{a(a^2+3)}{2}, 0\right)$

Així, l'àrea del triangle serà $g(a) = \frac{1}{2}\frac{a^2+3}{a^2}\frac{a(a^2+3)}{2} = \boxed{\frac{(a^2+3)^2}{4a}}$

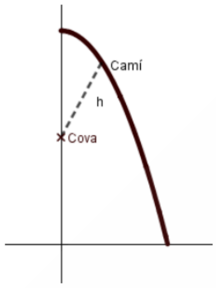
b) Calculem els punts singulars de la funció $g(a)$ igualant la seva derivada a zero:

$$g'(a) = \frac{2(a^2+3)\cdot 2a\cdot 4a - (a^2+3)^2\cdot 4}{(4a)^2} = \frac{4(a^2+3)(\dots)}{16a^2} = \dots = \frac{3(a^2+3)(a^2-1)}{4a^2} = 0,$$

$a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$ Prenem però només $a = 1$ ja que el punt P és al primer quadrant. Així el punt P té coordenades $(1, f(1)) = \boxed{(1,2)}$.

Es comprova que l'àrea és mínima perquè el signe de la funció g' (que és el de la part (a^2-1) perquè la resta de termes són positius) canvia en $a = 1$:
a l'esquerra (per exemple, $x = 0{,}9$) és negatiu (i, per tant, la funció g és decreixent),
a la dreta (per exemple, $x = 1{,}1$) és positiu, (i, per tant, la funció g és creixent).
El valor de l'àrea mínima és $g(1) = \frac{(1+3)^2}{4} = \boxed{4\ u^2}$

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems (0, 4) i (2, 0). La cova està situada en el punt de coordenades (0, 2), tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini des del camí a la cova que sigui el més curt possible.

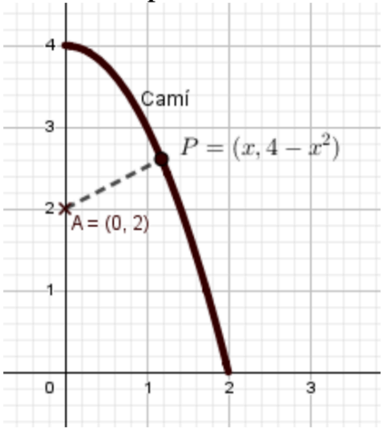


a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.
[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.
[1,25 punts]

Solució:

a) Quan posem la graella de valors que ens diu el problema obtenim:



Els punts del camí tenen coordenades $P = (x, 4 - x^2)$. La distància entre $A = (0, 2)$ i qualsevol punt del camí és:

$$d(A,P) = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \boxed{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

b) Per a resoldre aquest problema d'optimització necessitem saber els candidats a màxim i mínim, que han de ser punts en què s'anul.li la funció derivada.

Calculem f'(x).

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$ .Igualem la derivada a zero per trobar els possibles extrems de f(x).

$x(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ del que només agafem les solucions positves.

Esbrinem ara quin són els mínims:

	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	<0	0	>0
$f(x)$	decreixent	mínim	creixent

També es pot raonar que com que $x^4 - 3x^2 + 4$ és sempre positiu els mínims de f(x) estan en els mateixos punts que els mínims de $(f(x))^2 = g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ i per tant:

$$g'(x) = 4x^3 - 6x; g'(x) = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 3) \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

D'aquestes solucions només considerem, pel context del problema, les positives.

Comprovem quins són els màxims i quins els mínims.

$$g''(x) = 12x^2 - 6$$

$g''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ En x=0 hi ha un màxim

$g''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 12 > 0 \;\Rightarrow$ En $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ hi ha un mínim.

Per tant el punt del camí que minimitza la distància del camí a la cova és

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 4 - \frac{3}{2}\right) = \boxed{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)}$$

La longitud mínima del camí serà:

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - 3\frac{3}{2} + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{2}\,u}$$