3.

a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8,8,8)$ i té vectors directors $\boldsymbol{u} = (1,2,-3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1,0,3)$.
[1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1,-5,a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Solució:

a) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-8 & 1 & -1 \\ y-8 & 2 & 0 \\ z-8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x + 2z = 64 \rightarrow \boxed{3x + z = 32}.$$

Observació: Naturalment, també es donarà per bona la construcció de l'equació del pla a partir del vector normal del pla calculat com el producte vectorial dels dos vectors directors, o equivalent.

b) Perquè el punt $(1, -5, a)$ sigui del pla, ha de satisfer l'equació, per tant:

$$3 + a = 32 \rightarrow \boxed{a = 29}$$

Ens demanen la recta que passa pel punt $(1, -5,29)$ i té vector director el vector normal al pla, que és $(A, B, C) = (3,0,1)$. Així l'equació paramètrica de la recta demanada és:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5 \quad \text{amb } t \in \boldsymbol{R} \\ z = 29 + t \end{cases}}$$

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2,-5,1)$ i que té per vector director $(-1,0,-1)$.
   a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
   [1,25 punts]

Solució:

a) El vector director de r és $v_r = (2,\text{-}2,1)$ i un punt és $P_r = (1,3,0)$.
El vector director de s és $v_s = (\text{-}1,0,\text{-}1)$ i un punt és $P_s = (2,-5,1)$

La seva posició relativa l'obtindríem a partir de:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (1,-8,1) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 8 - 16 - 2 = -8 \neq 0$$

Per tant $\boxed{\text{les dues rectes es creuen}}$ a l'espai tridimensional.

b) El vector normal del pla serà perpendicular als vectors directors respectius de cada recta.

$$n = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i + j - 2k = (2,1,-2)$$

Com que la recta s ha d'estar continguda al pla ($P_s \in \pi$) $\rightarrow$

$$\pi: 2(x-2) + 1(y+5) - 2(z-1) = 0$$

per tant el pla serà $\boxed{\pi: 2x + y - 2z = -3}$

o també:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{2x + y - 2z + 3 = 0}$$