4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x>0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=\mathrm{e}$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0<x<5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

Solució:

a)

[1 punt]

La recta tangent és horitzontal en els punts on la derivada s'anul·la, aleshores:

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2} \rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \rightarrow 1-\ln x=0 \rightarrow \ln x=1 \rightarrow x=e$

Així, l'únic punt amb recta tangent horitzontal és $(x,y)=\left(e,\frac{1}{e}\right)$

Per determinar si és un extrem relatiu podem fer servir el criteri de la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f''(e)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}=\frac{-1}{e^3}<0$ → indica que correspon a un màxim relatiu.

b)

[0,5 punts]

En relació amb les asímptotes, com que la funció només està definida per $x>0$, cal mirar l'asímptota només per a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\text{ ind.}$$

Aplicant la regla de l'Hôpital, resoldrem aquesta indeterminació:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Per tant, l'eix d'abscisses, $y=0$, és una asímptota horitzontal d'aquesta funció.

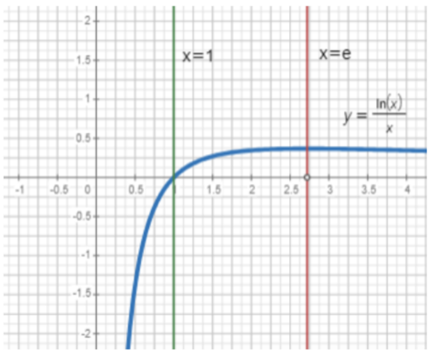
c)

[1 punt]

L'àrea demanada correspon a la integral definida:

$$A=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}lnx\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}u^2$$

La representació gràfica és:



6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
[1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

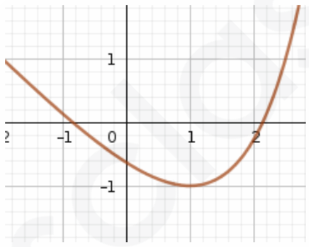
La funció és contínua per ser la suma de dues funcions continues, l'exponencial i una polinòmica de primer grau.

Per analitzar-ne la monotonia estudiarem el signe de la derivada:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 = 0$ per tant $e^{x-1} = 1$ d'on $x - 1 = 0$ i, així, $x = 1$ és un punt crític.

Fem la taula de comportament

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	decreix	-1	creix



La funció té un mínim relatiu (i absolut) en el punt $(1, -1)$,
és monòtona decreixent en l'interval $(-\infty, 1)$ i monòtona creixent en l'interval $(1, +\infty)$.

b)

[1,25 punts]

Per demostrar si la funció té o no arrels aplicarem el teorema de Bolzano. En aquest cas la funció és contínua en tots els reals, per tant, ho és en qualsevol interval tancat, concretament en l'interval $[-1,3]$.

Els tots dos extrems de l'interval la funció és positiva:

$f(-1) = e^{-2} > 0$ i $f(3) = e^2 - 4 > 0$

Per altra banda, sabem que $f(-1) > 0$ i que en $x = 1$ la funció té un mínim absolut. Així, pel teorema de Bolzano, podem afirmar que:

- existeix una arrel en l'interval obert $(-1,1)$. Aquesta arrel és única ja que la funció és monòtona decreixent en aquest interval.
- existeix una altra arrel en l'interval $(1,3)$ que també és única per ser monòtona creixent en aquest interval.

Així no pot existir cap altra arrel d'aquesta funció en l'interval donat.