2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.
[1 punt]

Solució:

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El determinant de la matriu de coeficients, A, és:

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -p^3+3p^2-2p = -p(p-1)(p-2)$$

Els valors de p que fan que el determinant sigui zero són: $p=0, p=1$ i $p=2$.

Aleshores:

- Si $p \neq 0,1,2 \to \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \to$ Sistema compatible determinat
- Si $p=0$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \to \text{Sistema incompatible}$$

- Si $p=1$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \to \text{Sistema incompatible}$$

- Si $p=2$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{núm. incògnites} = 3 \to \text{Sistema compatible indeterminat}$$

b)

[1 punt]

Per a $p=2$ el sistema és compatible indeterminat, dues de les equacions són coincidents. Cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y=2-z \\ 2x+2y=1-4z \end{cases}$$

Prenem $z=t$ com a paràmetre i tenim $x=\frac{3}{2}+t,\quad y=-3t-1,\quad z=t$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

5. ***a***) Donada la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.
[1,25 punts]

b) Una matriu quadrada $\boldsymbol{M}$ satisfà que $\boldsymbol{M}^3-3\boldsymbol{M}^2+3\boldsymbol{M}-\boldsymbol{I}=0$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat. Justifiqueu que $\boldsymbol{M}$ és invertible i expresseu la inversa de $\boldsymbol{M}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{I}$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

Calculem A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu A^2 és $|A^2| = 1 \neq 0$, per tant, és una matriu invertible.

Multipliquem l'equació matricial per $(A^2)^{-1}$ per l'esquerra, així ens queda:

$A^2 \cdot X = A - 3 \cdot I \rightarrow X = (A^2)^{-1}(A - 3 \cdot I)$

Calculem la matriu inversa de A^2:

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Finalment:

$X = A(A - 3 \cdot I)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

[1,25 punts]

Sumem I a les dues bandes de la igualtat que ens donen:

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \rightarrow M^3 - 3M^2 + 3M = I$$

Traiem M factor comú per l'esquerra:

$$M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I \qquad (*)$$

Fem el determinant a banda i banda de la igualtat i tenim:

$$det\big(M \cdot (M^2 - 3M + 3I)\big) = \det I = 1 \rightarrow \det M \cdot det(M^2 - 3M + 3I) = 1$$

D'on podem afirmar que $\det M \neq 0$, ja que si s'anul·lés la igualtat anterior no se satisfaria. Així doncs, M és invertible i podem expressar la inversa de la forma següent:

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$$

De l'expressió (*) es pot deduir directament que la matriu M és invertible i que l'expressió de la inversa, sense haver de justificar que el determinant és diferent de 0.