1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.
[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.
[1,25 punts]

Solució:

L'equació de la recta tangent en el punt de la paràbola $(a, f(a)) = (a, 4 - a^2)$ és:

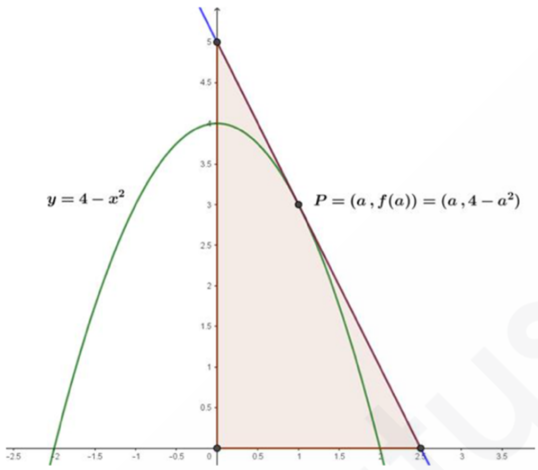
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculem la derivada i l'avaluem en $x = a$:

$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(a) = -2a.$

La recta tangent a la paràbola és:

$$y - (4 - a^2) = -2a \cdot (x - a) \rightarrow\ y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2\ \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$$



Calculem el punt de tall amb l'eix OX $(y = 0)$:

$0 = -2ax + a^2 + 4;\ \ x = \frac{a^2+4}{2a}$

Tenim el punt $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$.

El punt de tall amb l'eix OY $(x\ =\ 0)$ és:

$$y = a^2 + 4$$

I tenim el punt $(0, a^2 + 4)$.

El triangle té vèrtexs en els punts $(0,0)$, $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$ i $(0, a^2 + 4)$, per tant, és un triangle rectangle de base $\frac{a^2+4}{2a}$ i altura $a^2 + 4$. La seva àrea és:

$$S(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)(a^2 + 4) = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

Derivem i igualem a zero:

$$S'(a) = \frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{4a^2}, \quad S'(a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ a = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Rebutgem la solució $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ja que a ha de ser positiu, per tant, el valor buscat és $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, que serà un mínim ja que:

$$S'(a) = \begin{cases} < 0 \ \text{ si } \ 0 < a < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és decreixent per a } a < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \geq 0 \ \text{ si } \ a \geq \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és creixent per a } a > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi : x = y$ i la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π.
[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta perpendicular al pla $x = y$ que passa pel punt $(-1,3,1)$ té com a vector director $(1,-1,0)$, per tant l'equació és:

$$(x,y,z) = (-1,3,1) + t(1,-1,0) = (-1+t, 3-t, 1)$$

Fem la intersecció d'aquesta recta amb el pla i trobarem M, el punt mig del segment PP':

$$x = y \rightarrow -1 + t = 3 - t \rightarrow t = 2 \; ; \quad M = (1,1,1)$$

Finalment, $M = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P = (2+1, 2-3, 2-1) = (3,-1,1)$

b)

[1,25 punts]

El vector normal al pla que ens demanen és perpendicular a la recta r i també ha de ser perpendicular al pla π. El calculem fent el producte vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \rightarrow (1,1,-5)$$

L'equació del pla és $x + y - 5z + D = 0$ i si imposem que ha de passar pel punt $(1,0,2)$ determinem el terme independent D:

$$1 - 10 + D = 0 \rightarrow D = 9$$

Finalment, l'equació del pla demanat és $x + y - 5z + 9 = 0$