4. De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	-6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Trobeu $f(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu $(g \circ f)'(1)$.
[1 punt]

Solució:

a)

De l'enunciat tenim que $4x^3-9x^2-2x+1$ és la funció derivada de $f(x)$. Per tant, $f(x)$ serà una primitiva de $4x^3-9x^2-2x+1$.
Calculem el conjunt de primitives de $4x^3-9x^2-2x+1$:

$$\int(4x^3-9x^2-2x+1)\,dx= x^4-3x^3-x^2+x+C$$

Sabem que $f(0)=2$ (o que $f(1)=0$). Per tant,

$f(0)=C=2$ i la funció buscada és $f(x)=x^4-3x^3-x^2+x+2$

Observació: L'exercici es puntuarà com a correcte tant si es fa servir només un dels dos punts (x=0 o x=1) per a determinar la constant C com si es fan servir els dos (cercant una certa coherència de les dades de l'enunciat).

b)

Aplicant la regla de la cadena per a la derivada d'una composició de funcions tenim:

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)$$

Per les taules de valors sabem que $f(1)=0$, que $f'(1)=-6$ i que $g'(0)=1$. Llavors,

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)=g'(0)\cdot f'(1)=1\cdot(-6)=-6.$$

6. Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$.
[1 punt]

Solució:

a)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = \frac{1}{t} + C = \boxed{\frac{1}{\cos x} + C}$$

La primitiva es quasi immediata o podem assajar el canvi de variable $\cos x = t$

$\cos x = t$
$-\sin x\, dx = dt$
$\sin x\, dx = -dt$

Observació: Com que a l'enunciat es demana "una" primitiva, l'exercici es donarà per ben resolt amb o sense la constant d'integració.

b) La funció sinus és positiva a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Atès que el denominador de la funció està elevat al quadrat, és també positiu en tot l'interval. La funció és, per tant, positiva i l'àrea demanada és:

$$\text{Àrea} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \left[\!\left[\frac{1}{\cos x}\right]\!\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 1 =$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = 0{,}414\ u^2}$$