2. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que satisfan la igualtat $A^2 - \frac{1}{2} A \cdot B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 3.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la matriu inversa d'A: A^{-1}.
[1 punt]

Solució:

a) Només cal fer les operacions.

$$A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Traient factor comú A per l'esquerra: $A \cdot \left(A - \frac{1}{2}B\right) = I$, així que $A^{-1} = A - \frac{1}{2}B$.

Operant, deduïm que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real a.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Solució:

a)

La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & a & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\1\\2a\end{matrix}\end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem quan $\det(A) = 0$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & a & 0\end{vmatrix} = 2a - 4$, que s'anul·la només per $a = 2$. Així doncs, tenim dos casos:

$\boxed{\text{CAS } a = 2}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\1\\4\end{matrix}\end{array}\right)}_{A'}$$

S'observa que les dues primeres columnes són iguals. Per tant, tots els menors que les incloguin valdran zero. A més, el determinant

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix} = 0$ també val zero, per tant, $\text{rang}(A') < 3$. Com que el menor d'A $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} \neq 0$, aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3$ nombre d'incògnites i, per tant, $\boxed{\text{és un SCI amb 1 (=3-2) grau de llibertat.}}$

$\boxed{\text{CAS } a \neq 2.}$ $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant, $\boxed{\text{és un SCD.}}$

b) Per al cas $a = 2$ sabem que es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb una incògnita lliure i equivalent a

$$\left.\begin{matrix} x & -z = 1 - y\\ x & = 2 - y\end{matrix}\right\}$$

Per tant, si agafem la incògnita y com a paràmetre, obtenim $x = 2\text{-}y$ i $z = x + y - 1 = 2 - y + y - 1 = 1$. Així la solució és de la forma $\boxed{(2 - y, y, 1)}$ per a qualsevol valor del paràmetre o variable y.