1. Considereu el pla $\pi: x + y + z = 1$ i la recta r que passa pels punts $P = (0, 0, 6)$ i $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta *r* i el pla π.
[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta *r* i el pla π.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades $(\mathrm{x_0}, \mathrm{y_0}, \mathrm{z_0})$ al pla d'equació $\mathrm{Ax + By + Cz + D = 0}$ amb l'expressió $\frac{|\mathrm{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}|}{\sqrt{\mathrm{A^2 + B^2 + C^2}}}$.

Solució:

a)

El producte escalar entre el vector normal al pla $\vec{n} = (1, 1, 1)$ i el vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -3)$ és 1 + 2 – 3 = 0, per tant, la recta és paral·lela al pla o hi està continguda. Només cal veure que el punt P o el punt Q no estan en el pla per concloure que són paral·lels.

L'estudi d'aquesta posició relativa es pot fer d'altres maneres:

- Passant la recta a forma general es facilita l'estudi del sistema format per les tres equacions, que condueix a veure el paral·lelisme entre la recta i el pla.
- Passant la recta a forma paramètrica, la intersecció amb el pla mostra que no hi ha solució, fet que mostra el paral·lelisme entre la recta i el pla.

b) Atès que la recta i el pla són paral·lels, per a calcular la distància entre ambdós n'hi ha prou a considerar un punt de la recta i calcular la seva distància al pla. Un punt de la recta és, per exemple, el punt $P = (0,0,6)$, i la distància demanada és:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = d(P = (0,0,6), \pi: x + y + z - 1 = 0) =$$
$$= \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 - 1|}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}887\ u}$$

5. A R^3, siguin la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ i el punt $P = (0,1,-1)$.

a) Calculeu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π perpendicular a la recta r i que passa pel punt P.
[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla $x + y + z = -3$.
[1 punt]

Solució:

a) π perpendicular a r té per vector normal el vector director de r : $\vec{n} = \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,2)$. I si ha de passar per $P(0,1,-1)$ $\rightarrow \pi: 2x - y + 2z = D$ $\rightarrow$ $-1 - 2 = D$ $\rightarrow D = -3$ $\rightarrow$ $\boxed{\pi: 2x - y + 2z = -3}$

b) Hem de calcular primer la recta perpendicular al pla $x + y + z = -3$ i que passa per P. El vector normal del pla, (1,1,1), serà el vector director de la recta i, per tant, la recta serà $(x, y, z) = (t, 1 + t, -1 + t)$.

Caldrà buscar ara el punt d'intersecció de la recta $(x, y, z) = (t, 1 + t, -1 + t)$ amb el pla $x + y + z = -3$.

Si substituïm un punt genèric de la recta en el pla obtenim:

$$t + 1 + t - 1 + t = -3$$
$$3t = -3$$
$$t = -1$$

Per tant, el punt intersecció és $Q = (-1,0,-2)$ i el punt simètric serà

$$P' = P + 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = (0,1,-1) + 2 \cdot (-1,-1,-1) = \boxed{(-2,-1,-3)}$$