1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

   a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.
   [1 punt]

   b) Per als valors $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los
   [1 punt]

Solució:

a) A partir de $f'(x)=3x^2-2ax+b$ i de la recta tangent $y=x+3$, obtenim que $f(0)=3$ i $m=f'(0)=1$.

Les condicions per a la funció *f* en els punts d'abscissa 1 i 0 són:

$$\begin{cases} f'(1)=3-2a+b=0 \\ f'(0)=b=1 \\ f(0)=c=3 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

b) La funció és $f(x)=x^3-2x^2+x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+1$

Si fem $f'(x)=3x^2-4x+1=0$, les abscisses dels possibles extrems són $x=1$ i $x=\frac{1}{3}$.

Amb la segona derivada $f''(x)=6x-4$ deduïm:

- $f''(1)=2>0$, per tant, hi ha $\boxed{\text{un mínim relatiu en } x=1}$
- $f''\left(\frac{1}{3}\right)=2-4<0$, per tant, hi ha $\boxed{\text{un màxim relatiu en } x=\frac{1}{3}}$

6. Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$,

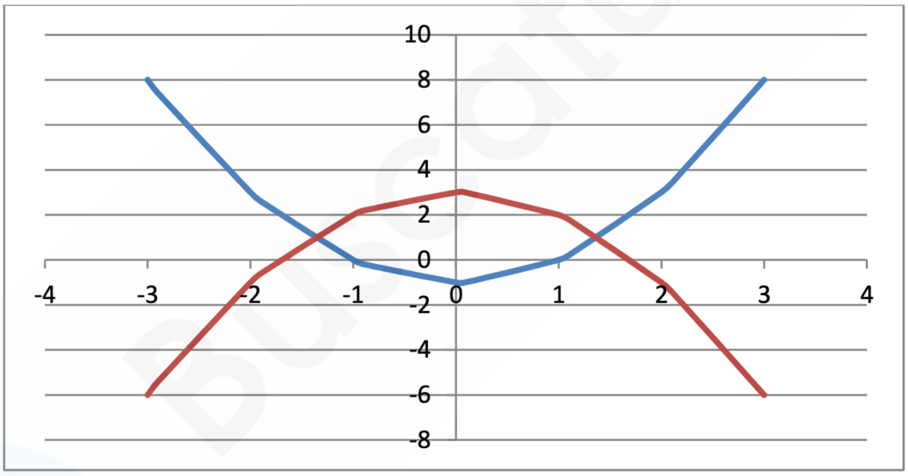
   a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesians i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.
   [1 punt]

   b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.
   [1 punt]

Solució:

a) La gràfica de $f(x) = x^2 - 1$ talla l'eix OX en els punts d'abscissa x = 1 i x = −1. Per tant, els punts de tall amb l'eix de les abscisses són $\boxed{(-1, 0) \text{ i } (1, 0)}$.
El vèrtex (mínim) és en el punt mitjà entre les solucions, x = 0, amb ordenada $f(0) = -1$, i per tant, el $\boxed{\text{vèrtex és el punt } (0, -1)}$.
La gràfica de $g(x) = 3 - x^2$ talla l'eix OX en els punts $x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$.
Per tant, els punts de tall amb l'eix de les abscisses són $\boxed{(\sqrt{3},\ 0) \text{ i } (-\sqrt{3},\ 0)}$.
El vèrtex (màxim) és en el punt mitjà entre les solucions, x = 0, amb ordenada $g(0) = 3$, i per tant, el $\boxed{\text{vèrtex és el punt } (0, 3)}$.

Calculem els punts de tall entre les dues gràfiques:
$x^2 - 1 = 3 - x^2$
$2x^2 = 4$
$x^2 = 2$
Per tant, els punts de tall són a les abscisses $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ amb valor $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 1$ i $f(-\sqrt{2}) = g(-\sqrt{2}) = 1$. Així doncs, els punts d'intersecció de les gràfiques són $\boxed{(\sqrt{2},\ 1) \text{ i } (-\sqrt{2},\ 1)}$



b) En el dibuix es veu que l'eix OY és un eix de simetria de l'àrea compresa entre les dues gràfiques. Aquest fet ens permet fer el càlcul de l'àrea en el primer quadrant i multiplicar per 2.
Com que ens demanen l'àrea en el semiplà y ≥ 0, el càlcul de l'àrea demanada és:

$$2\int_0^1 (3 - x^2)dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} ((3 - x^2) - (x^2 - 1))dx =$$

$$= 2\left(3x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + 2\left(4x - 2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\frac{8}{3} + 2\left(4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4 + \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{16\sqrt{2} - 4}{3}\ u^2} =$$
$$= \boxed{6{,}21\ u^2}$$

Comentari: Qualsevol altre càlcul equivalent i correcte serà igualment ben valorat.