2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 1$.
[1 punt]

Solució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, *A* i *A'*, són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{2 \quad a \quad 0}_{A}} & 2a \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem det(A) = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a - 4$$

Que s'anul·la per a $a = 2$

- $\boxed{\text{Cas } a \neq 2}$. Rang(A) = Rang(A') = 3 = nombre d'incògnites. Per tant, és un $\boxed{\text{SCD}}$.

- $\boxed{\text{Cas } a = 2}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{2 \quad 2 \quad 0}_{A}} & 4 \end{array}\right)}_{A'}$$

S'observa que les dues primeres columnes són iguals. Per tant, tots els menors que les incloguin valdran zero. A partir d'aquí, l'únic determinant d'ordre 3 que cal considerar a *A'* és

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, que també val zero; per tant, rang(A') < 3. Com que el menor de A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = nombre d'incògnites, i per tant, és un $\boxed{\text{SCI amb } (3 - 2 = 1) \text{ un grau de llibertat}}$.

b) El sistema es pot resoldre per determinants o bé de manera tradicional (igualació/substitució/reducció). És un sistema $\boxed{\text{compatible determinat amb solució } x = 0,\ y = 2 \text{ i } z = 1.}$

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què α és un paràmetre real.

   a) Hi ha algun valor de $\alpha \in R$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?
   [1 punt]

   b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a $\alpha = 0$.
   [1 punt]

Solució:

a) La matriu A no tindrà inversa si i només si el determinant de A és 0.

Fem el determinant de la matriu A:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 - 1 = 0$. No té solució real.

$\boxed{\text{Això vol dir que la matriu } A \text{ té inversa per qualsevol valor de } \alpha.}$

Comentari: És molt possible que hi hagi alumnes que s'equivoquin al resoldre l'equació i donin com a solució que A no té inversa quan $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$. Aquest error no afectarà l'apartat b.

b) Ara fem $\alpha = 0$ i busquem la matriu A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per a veure que A^2 té inversa, comprovem que té determinant diferent de zero.

Efectivament, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

La matriu inversa de A^2 és $(A^2)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$