3. Considereu el pla de vectors directors $u = (-1, 3, 2)$ i $v = (2, 1, 0)$ i que passa pel punt $A = (1, 0, 3)$.

   a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt A.
   [1 punt]

   b) Calculeu la distància del punt $P = (1, 5, 0)$ al pla.
   [1 punt]

   Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Solució:

a) El vector director de la recta perpendicular al pla és:

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 4j - 7k = (-2, 4, -7)$$

Per tant, l'equació vectorial de la recta serà $\boxed{(x, y, z) = k\cdot(-2, 4, -7) + (1, 0, 3).}$

b) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x + 4y - 7z + 23 = 0$$

La distància al punt P és: $d(P, pla) = \frac{|-2\cdot 1 + 4\cdot 5 - 7\cdot 0 + 23|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \frac{41}{\sqrt{69}} = \boxed{\frac{41\sqrt{69}}{69}\ u} = \boxed{4{,}94\ u}$

5. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ i $C = (1, 0, 0)$ i la recta r: $x = y - 1 = \frac{z}{2}$.
   a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta r amb el pla que passa pels punts A, B i C.
   [1 punt]
   b) Trobeu els punts P de la recta r per als quals el tetraedre de vèrtexs P, A, B i C té un volum de 2u^3.
   [1 punt]

   Nota: El volum d'un tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S es pot calcular amb l'expressió $\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})\right|$.

Solució:

a) L'equació del pla que passa pels punts A, B i C es pot obtenir (a partir, per exemple, del punt C i dels vectors directors $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{CA}$): $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 5 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

D'això en resulta $2z = 0$, o sigui, $\boxed{z = 0}$.

Ara trobem la intersecció amb la recta r:

$x = y - 1 = \frac{z}{2}$; per tant, els punts de la recta r són de la forma $(x, y, z) =$

$(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$. Com que $z = 0$, obtenim $\lambda = 0$, i per tant, el punt d'intersecció és $\boxed{(0,1,0)}$.

b) Els punts P de la recta r són de la forma $P = (\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$.
Calculem el volum del tetraedre: $V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|$; per tant,

$$\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ \lambda + 1 & 1 & 5 \\ 2\lambda & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = 2.$$

O sigui, $\frac{1}{6}\ |-4\lambda| = 2$; és a dir, $|\lambda| = 3$, i per tant, hi ha dues solucions: $\lambda = 3\ i\ \lambda = -3$, i d'aquí en resulta $\boxed{P_1 = (3,4,6) \text{ i } P_2 = (-3, -2, -6)}$.