1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
   a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió limitada per le gràfiques.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
   [1 punt]

Solució:

a) Calculem els punts d'intersecció per parelles de funcions.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 2x, x = 0, y = 0 \Rightarrow \boxed{P = (0,0)}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \; o \; x = 1$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow P = (0,0)$$

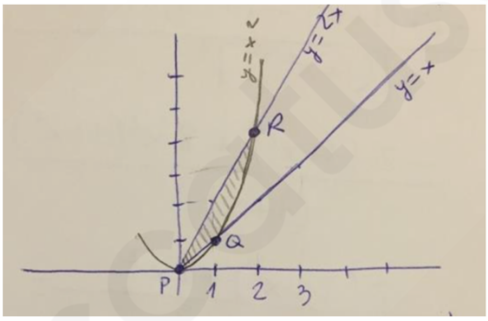
$$x = 1, y = 1 \Rightarrow \boxed{Q = (1,1)}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \; o \; x = 2$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow P = (0,0)$$

$$x = 2, y = 4 \Rightarrow \boxed{R = (2,4)}$$

I quan en fem l'esbós, obtenim la representació gràfica següent:



b) Per calcular l'àrea del recinte, l'hem de descompondre en dues parts: d'una banda, la part limitada per la recta $y = 2x$ i, d'una altra, la recta $y = x$ i la part limitada per la recta $y = 2x$ i la paràbola.

$$S = \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

Observació: les descomposicions alternatives del recinte que siguin correctes també es donen per bones. Per exemple:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx - \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 4 - \frac{8}{3} - 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{24 - 16 - 3 + 2}{6} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
   a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f, les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.
   [1 punt]

Solució:

a) Per poder avaluar la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ necessitem poder calcular el logaritme neperià del numerador (això vol dir que x sigui estrictament positiva) i poder dividir (és a dir, que x no sigui 0). Així doncs, $\boxed{dom(f) = (0, +\infty)}$.

Com que $x = 0$ no pertany al domini de la funció, $\boxed{\text{no hi ha intersecció amb l'eix } OY}$.
Com que $f(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$, $\boxed{\text{la intersecció amb l'eix } OX \text{ és } (1, 0)}$.

Per als intervals de creixement cal estudiar el signe de la funció derivada primera.
La funció derivada és $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.
Resolent $f'(x) = 0$ s'obté com a única solució $\mathrm{x} = \mathrm{e}$. Així doncs, els intervals de creixement són els següents:

$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$
f creixent	f decreixent

b) Comencem calculant una primitiva de la funció f (és quasiimmediata):

$$F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

A l'interval $(1, e)$ la funció f és sempre positiva o zero. Per tant:

$$A = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \left.\frac{\ln^2(x)}{2}\right|_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}\, u^2}.$$