2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
   [1 punt]

   b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1 : x + (a-1)z = 0, \pi_2 : x + ay + z = 1$ i $\pi_3 : 4x + 3a\, y + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a.
   [1 punt]

Solució:

a) La matriu A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - 4a(a-1) - 3a = -a^2 - a$$
$$= -a(a+1)$$

$\boxed{\text{Per tant, } A \text{ és invertible si i només si } a \neq 0 \text{ i } a \neq -1.}$

b) Cal discutir el sistema d'equacions lineals amb matriu i matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 4 & 3a & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- En l'apartat anterior ja hem vist que $rang(A) = 3$ si i només si $a \neq 0$ i $a \neq -1$. En aquest cas, el sistema d'equacions és compatible i determinat, té una única solució i $\boxed{\text{es tracta de tres plans que es tallen en un punt.}}$

- Per a $a = 0$ tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang(A)} = 2$ (perquè la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 1 + 3 = 1 \neq 0$$

observem que $\text{rang}(MA) = 3$.

D'això se'n dedueix que el sistema és incompatible i que, per tant, no hi ha cap punt comú als tres plans.

$\boxed{\text{Es tracta de tres plans que es tallen dos a dos (perquè dos a dos no són paral·lels en no ser proporcionals els respectius vectors normals) en rectes paral·leles.}}$

- Per a $a = -1$ tenim $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang}(A) = 2$ (la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 - 1 + 6 = 0,$$

observem que $\text{rang}(MA) = 2$.

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(MA) = 2$ i el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) un grau de llibertat. $\boxed{\text{Es tracta de tres plans que es tallen en una recta.}}$

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1 punt]

b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

Solució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Si suposem que el determinant de la matriu A fos NO nul (diferent de zero), la matriu inversa d'A existiria. Multiplicant la matriu inversa d'A per l'esquerra d'ambdós membres de l'expressió $A \cdot B = 0$, obtindríem

$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$, i, per tant, $B = 0$, que contradiria el supòsit que les dues matrius són no nul.les.

El raonament es pot reproduir per a la matriu B.

Per tant, el determinant de la matriu A i el de la matriu B han de ser nuls.

Comentari: qualsevol altre raonament equivalent i correcte serà igualment ben valorat.