2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
   [1 punt]

   b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0, \pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3a\,y + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a.
   [1 punt]

Solució:

a) La matriu A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - 4a(a-1) - 3a = -a^2 - a$$
$$= -a(a+1)$$

$\boxed{\text{Per tant, } A \text{ és invertible si i només si } a \neq 0 \text{ i } a \neq -1.}$

b) Cal discutir el sistema d'equacions lineals amb matriu i matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 4 & 3a & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- En l'apartat anterior ja hem vist que $rang(A) = 3$ si i només si $a \neq 0$ i $a \neq -1$. En aquest cas, el sistema d'equacions és compatible i determinat, té una única solució i $\boxed{\text{es tracta de tres plans que es tallen en un punt.}}$

- Per a $a = 0$ tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang(A)} = 2$ (perquè la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 1 + 3 = 1 \neq 0$$

observem que $\text{rang}(MA) = 3$.

D'això se'n dedueix que el sistema és incompatible i que, per tant, no hi ha cap punt comú als tres plans.

$\boxed{\text{Es tracta de tres plans que es tallen dos a dos (perquè dos a dos no són paral·lels en no ser proporcionals els respectius vectors normals) en rectes paral·leles.}}$

- Per a $a = -1$ tenim $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang}(A) = 2$ (la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 - 1 + 6 = 0,$$

observem que $\text{rang}(MA) = 2$.

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(MA) = 2$ i el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) un grau de llibertat. $\boxed{\text{Es tracta de tres plans que es tallen en una recta.}}$

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.
   a) Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]

   Nota: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors v i w podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, en què $v \times w$ és el producte vectorial del vectors v i w.

Solució:

a)

Eix OX: $x = ?\,, y = 0, z = 0 \implies x = 4 \implies \boxed{P = (4,0,0)}$

Eix OY: $y = ?\,, x = 0, z = 0 \implies 4y = 4 \implies y = 1 \implies \boxed{Q = (0,1,0)}$

Eix OZ: $z = ?\,, x = 0, y = 0 \implies 2z = 4 \implies z = 2 \implies \boxed{R = (0,0,2)}$

El perímetre serà $\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = \|(-4,1,0)\| + \|(-4,0,2)\| + \|(0,-1,2)\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0} + \sqrt{(-4)^2 + 0 + 2^2} + \sqrt{0 + (-1)^2 + 2^2} =$
$\boxed{\sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{17} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \cong 10{,}83\ u}$.

b) Si apliquem l'expressió de la fórmula, obtenim la igualtat següent:
$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$.

Calculem el producte vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & -4 & -4 \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,8,4).$$

Per tant, $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \frac{2}{2}\sqrt{21} =$
$\boxed{\sqrt{21} \cong 4{,}58\ u^2.}$