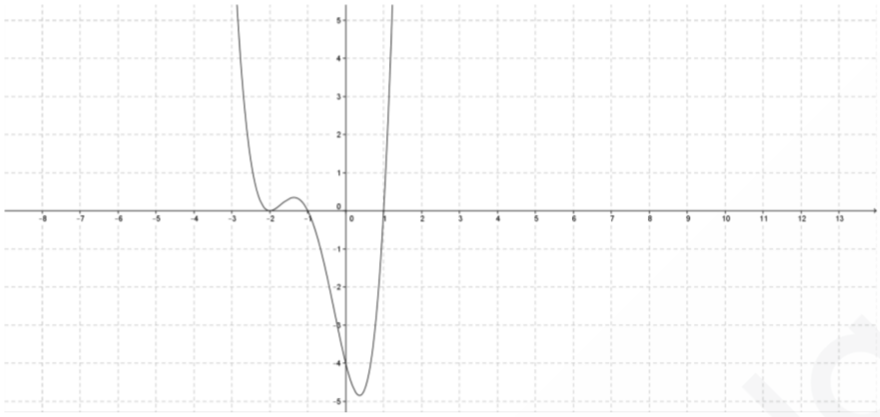
3. Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt (0, 1). La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

Solució:

a) L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Mirant la gràfica de $f'(x)$ podem veure que $f'(0) = -4$ i l'enunciat ens indica que $f(0) = 1$ ja que $f(x)$ passa pel punt $(0,1)$. Per tant, l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ és $y = -4(x-0) + 1$ o, el que és el mateix, $\boxed{y = -4x + 1}$.

b) Els punts singulars són aquells on s'anul·la la derivada; per tant, només cal veure els punts de tall de $f'(x)$ amb l'eix d'abscisses, és a dir, les x que compleixen que $f'(x) = 0$.

Observant la gràfica de $f'(x)$ observem que $f'(-2) = 0, f'(-1) = 0$ i $f'(1) = 0$. Així tenim que $f(x)$ presenta punts singulars en $\boxed{x = -2, x = -1 \text{ i } x = 1}$.

Ara només cal classificar-los.

Observem que en $x = -2$, la recta tangent a la funció derivada és horitzontal, és a dir, que $f''(-2) = 0$ i, per tant, $x = -2$ és una abscissa candidata a presentar una inflexió. Donat que $f'(x) > 0$ en l' interval $(-\infty, -2)$ i també $(-2, -1)$, això implica que $f(x)$ és creixent en aquests intervals. Per altra banda, abans de -2 la funció derivada es decreixent, és a dir, amb derivada negativa (o sigui $f''(x) < 0$) i després de -2 la funció derivada és creixent, és a dir, amb derivada positiva (o sigui $f''(x) > 0$). Això indica que en el punt $x = -2$ hi ha efectivament un canvi de concavitat i, per tant, en $x = -2$ la funció $f(x)$ presenta un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

Donat que $f'(x) > 0$ en l' interval $(-2, -1)$ i $f'(x) < 0$ a $(-1,1)$, ens indica que $f(x)$ és creixent a l'interval $(-2, -1)$ i és decreixent a $(-1,1)$, motiu pel qual podem concloure que en $x = -1$ la funció $f(x)$ presenta un màxim relatiu.

Finalment, en el punt d'abscissa $x = 1$ $f(x)$ presenta un mínim relatiu ja que $f(x)$ és decreixent a l'interval $(-1,1)$, atès que $f'(x) < 0$ en aquest interval, i $f(x)$ és creixent a $(1, +\infty)$ atès que $f'(x) > 0$ en aquest interval

$x = -2$ Punt d'inflexió amb recta tangent horitzontal
$x = -1$ màxim relatiu
$x = 1$ mínim relatiu