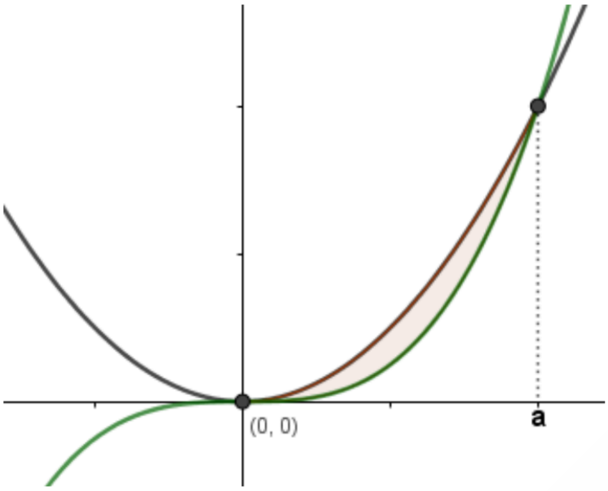
1. Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.
   a) Trobeu, en funció del paràmetre a, els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu el valor d'a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4}$ u^2.
   [1,25 punts]

Solució:

a)



Igualem les dues funcions i resolem:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 = ax^2$$
$$x^3 - ax^2 = 0$$
$$x^2(x - a) = 0$$
$$x = 0 \text{ i } x = a$$

Els punts de tall són

$$\boxed{(0,0) \text{ i } (a, a^3)}$$

b) L'àrea entre les dues funcions es calcularà amb la integral definida de la diferència de les dues funcions:

$$A = \int_0^a (g(x) - f(x))dx = \int_0^a (ax^2 - x^3)dx = \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{12}$$

$\frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \Rightarrow a^4 = 81 \;\Rightarrow a = \pm 3.$

Cal descartar el valor $a = -3$ ja que a ens diu l'enunciat, que és positiu.

Per tant, per a $a = 3$ l'àrea entre les dues funcions és $\frac{27}{4}\ u^2$.