4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.

[1,25 punts]

b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.

[1,25 punts]

Solució:

a) Estudiarem el rang de la matriu A a partir dels valors que fan que el rang sigui màxim, 3 en aquest cas, que és quan no s'anul·la el determinant de la matriu.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 7a - 3 + a - 12 = -a^2 + 8a - 15$$

$$|A| = -a^2 + 8a - 15 = 0 \to a = 3 \text{ i } a = 5$$

- Quan $a \neq 3$ i $a \neq 5 \to |A| \neq 0 \to rang(A) = 3$
- Quan $a = 3, rang(A) < 3$ ja que $det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es veu clarament que dues files qualssevol d'aquesta matriu són independents, perquè no són proporcionals, per tant $rang(A) = 2$.

Anàlogament, qualsevol menor d'ordre 2 no nul també justifica que $rang(A) = 2$.

- Quan $a = 5, rang(A) < 3$, ja que $det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. De manera anàloga al cas anterior $rang(A) = 2$.

Com abans, qualsevol menor d'ordre 2 no nul també justifica que $rang(A) = 2$.

b) Per al cas $a = 4$ tenim $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i pel que hem vist a l'apartat anterior la matriu A té rang 3, per tant, és invertible, és a dir que existeix A^{-1}.

Observació: La invertibilitat de la matriu A també es pot demostrar procedint al càlcul de la matriu inversa i veient que es pot dur a terme.

Per a comprovar que la matriu A^2 és la matriu inversa A^{-1}, és suficient comprovar que $A \cdot A^2 = I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que és el que volíem veure.