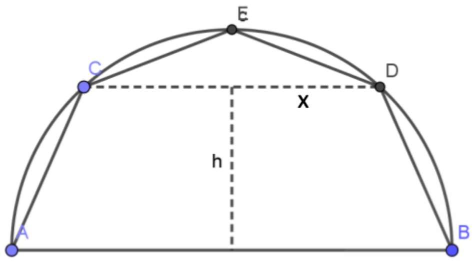
5. Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon ACEDB, tal com es mostra en la figura.



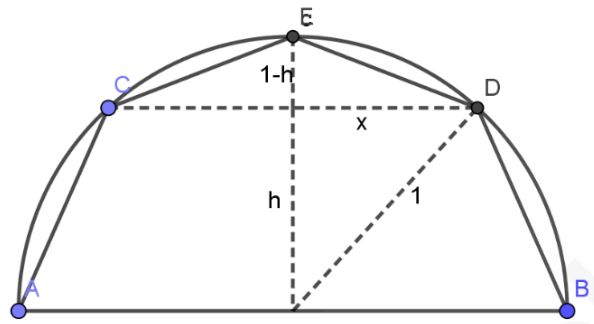
a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon ACEDB.
[1,25 punts]

b) Quina ha de ser la distància (indicada a la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon ACEDB sigui màxima?
[1,25 punts]

Solució:

a) Si anomenem x a la meitat de la longitud de la corda CD, aleshores tenim que

$$x = \sqrt{1^2 - h^2}$$



L'àrea del pentàgon és l'àrea del trapezi ACDB més l'àrea del triangle CED.

$$\boxed{A(h,x)} = \frac{(2x+2)\cdot h}{2} + \frac{2x\cdot(1-h)}{2} = (x+1)\cdot\ h\ +\ x(1-h)\boxed{=\ h\ +\ x}$$

b) Formuleu l'àrea en termes només h.

Com que $x = \sqrt{1^2 - h^2}$, tenim que $A(h) =\ h\ +\ \sqrt{1-h^2}$.

Ara cal calcular i resoldre $A'(h) =\ 0$.

$$A'(h) =\ 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0.$$

Tenim que $1\ = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$; $\sqrt{1-h^2} = h$, $h^2\ = 1/2$ i per tant $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (considerem només la solució positiva pel context del problema).

Mirant el signe de la derivada $A'(h)$ a l'entorn del punt singular $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ podem classificar el punt singular.

Com que $A'(0{,}5) = 0{,}4226 > 0$ i $A'(0.8) = -0.333 < 0$, la funció àrea creix abans i decreix després del punt singular, és a dir, que hi ha un màxim en $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, la corda s'ha de situar a distància $\frac{\sqrt{2}}{2}$, perquè l'àrea sigui màxima.