2. Un avió es desplaça des d'un punt $A = (0,3,1)$ cap a una plataforma plana d'equació $\pi: x - 2y + z = 1$ seguint una recta r paral·lela al vector $v = (1, -1, 0)$.
   a) Calculeu les coordenades del punt de contacte B de l'avió amb el pla i la distància recorreguda.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu l'equació general del pla perpendicular a la plataforma i que conté a la recta r seguida per l'avió des del punt A.
   [1,25 punts]

Solució:

a) L'equació paramètrica de la recta r és

$$(x, y, z) = (0,3,1) + \lambda\,(1, -1,0) = (\lambda, 3 - \lambda, 1).$$

Per a trobar el punt de contacte cal trobar la intersecció de la recta r amb el pla π:

$$\lambda - 2 \cdot (3 - \lambda) + 1 = 1$$
$$\lambda - 6 + 2\lambda + 1 = 1$$

d'on deduïm que $\lambda = 2$. Per tant, el punt de contacte buscat és $\boxed{B = (2,1,1)}$.

Finalment per a calcular la distància demanada apliquem la fórmula de la distància entre dos punts, els punt $A = (0,3,1)$ i el punt $B = (2,1,1)$, i obtenim

$$dist(A, B) = \sqrt{2^2 + (1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}\,u}$$

b) El pla buscat conté com a vectors directors el vector $v = (1, -1,0)$ (vector director de la recta r) i un vector normal al pla π, $n = (1, -2,1)$. Per tant, per a obtenir un vector normal al pla buscat calculem

$$n \times v = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

Per tant, el pla buscat té equació de la forma $x + y + z = k$ on k és un paràmetre real. Com que el punt A pertany al pla buscat, tenim $0 + 3 + 1 = k$ i, per tant, l'equació demanada del pla és $\boxed{x + y + z = 4}$.

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

6. Siguin les rectes r i s, expressades per $\frac{x-3}{2} = y = z - 1$ i $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivament.
   a) Determineu la posició relativa de les rectes.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu la distància entre la recta r i la recta s.
   [1,25 punts]

Solució:

a) Determinem un vector director de cada recta per a saber si són vectors linealment dependents (coincidents o paral·leles) o linealment independents (secants o que es creuen).
$v_r = (2,1,1)$ i $v_s = (1,-1,1)$.
Com que no són proporcionals, són vectors linealment independents. Per tant, les dues rectes o bé són secants (s'intersecten en un punt comú) o bé es creuen.

Verifiquem si són secants buscant la intersecció de *r* i *s*. Per això, substituint un punt genèric de la recta *s* en la recta *r*:

$$\frac{\mu-3}{2} = -\mu = \mu - 1$$

De la primera igualtat: $\mu - 3 = -2\mu \Rightarrow \mu = 1$

De la segona igualtat: $-\mu = \mu - 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

Com que s'obtenen valors diferents per al paràmetre μ, no hi ha punt intersecció i per tant $\boxed{\text{les rectes } r \text{ i } s \text{ es creuen}}$.

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

b) En aquest cas en què les rectes es creuen la distància entre elles la calcularem com a distància d'un punt d'una recta al pla paral·lel que conté l'altra recta, és a dir: $d(s, r) = d(P_s, \pi)$, on π és el pla que conté la recta *r* i és paral·lel a la recta *s*.

Els vectors directors del pla seran $v_r = (2,1,1)$ i $v_s = (1,-1,1)$.

El seu producte vectorial ens dona el vector normal al pla:

$$n = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & 2 & 1 \\ j & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-3) = (A, B, C)$$

Ara amb un punt de la recta r, $P_r = (3, 0, 1)$ construïm l'equació del pla:

$$\pi: 2(x-3) - 1(y-0) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y - 3z - 3 = 0$$

La distància serà:

$$d(s,r) = d(P_s,\pi) = d\big((0,0,0),\pi\big) = \frac{|2\cdot 0 - 0 - 3\cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{3\sqrt{14}}{14}u}$$

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.