2. ***a***) Donada la funció $f(x)=\dfrac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$. Trobeu també l'equació de la recta normal a $y=f(x)$ en aquest mateix punt.
[1,25 punts]

b) Feu un esbós de les gràfiques de la corba $y=f(x)$ i de la recta $4x+y=8$, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical $x=3$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

L'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt $x = 1$ és:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

Fem els càlculs:

$$f(x) = \frac{4}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

Així

$$f(1) = 4 \text{ i } f'(1) = -4$$

L'equació de la recta tangent demanada és:

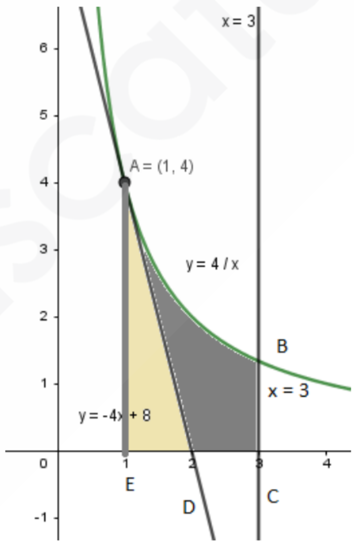
$$y - 4 = -4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -4x + 8 \rightarrow 4x + y = 8$$

L'equació de la recta normal es pot calcular a partir de l'equació:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{-4} \cdot (x - 1) \rightarrow 4y - 16 = x - 1 \rightarrow x - 4y = -15$$

Per fer l'esbós de la gràfica n'hi ha prou veient que:



- $x = 0$ no és del domini
- f és contínua
- $f'(x) = -\frac{4}{x^2} < 0$, per tant, f és decreixent
- Els eixos de coordenades són rectes asímptotes a la funció.

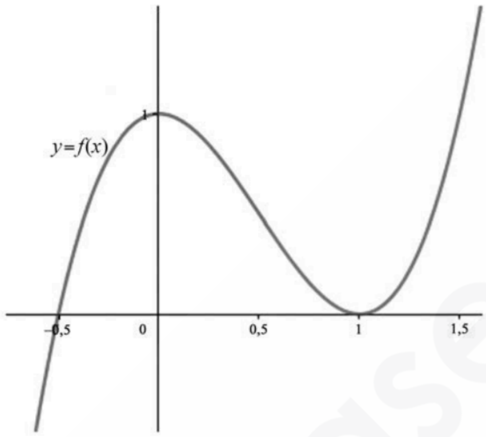
La recta donada, és la recta tangent en el punt $(1,4)$.

L'àrea demanada és la regió $ABCD$, que es pot obtenir restant l'àrea del triangle ADE, de la regió $ABCE$:

$$A_T = \int_1^3 \frac{4}{x}\, dx - A_{ADE} = [4\, ln(x)]_1^3 - \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$= 4[(ln(3) - ln(1)] - 2 = 4\, ln(3) - 2 = 2{,}39u^2$$

4. ***a***) En la figura es mostra la gràfica de la funció $f(x)$. Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de $f(x)$. Expliqueu el raonament que heu seguit.
[1,25 punts]

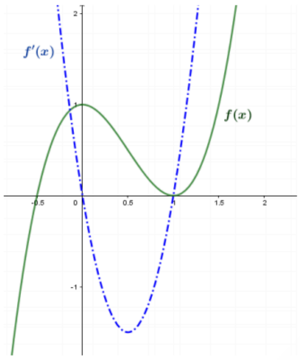


b) Calculeu els valors de a i b perquè la funció $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tingui un punt d'inflexió en $x = \frac{1}{2}$ i la seva derivada en aquest punt sigui $\frac{-3}{2}$.

[1,25 punts]

Solució:

a)



- La funció derivada passa pels punts $(0,0)$ i $(1,0)$ perquè són els punts on $f(x)$ presenta els extrems relatius.
- $f(x)$ és creixent quan $x < 0$ i quan $x > 1$ per tant la funció derivada és positiva en aquestes dues semirectes.
- $f(x)$ és decreixent quan $0 < x < 1$ per tant, en aquest interval la derivada és negativa.
- La funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en un punt proper a $x = \frac{1}{2}$ que coincidirà amb un mínim en la funció derivada.

b)

Imposem que $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ i que $g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

- $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \rightarrow g'(x) = 3ax^2 + 2bx \rightarrow 3a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow 3a + 4b = -6$
- $g''(x) = 6ax + 2b \rightarrow 6a\frac{1}{2} + 2b = 0 \rightarrow 3a + 2b = 0$

D'aquestes dues equacions

$$\begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

es dedueix que $a = 2$ i $b = -3$

6. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$.

a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.
[1,5 punts]

b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval $(-2, 1)$.
[1 punt]

Solució:

a)

Per trobar els punts crítics, calculem la primera derivada i la igualem a zero:

$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ o bé $x = 3$

Tenim dos punts crítics $x = 0$ i $x = 3$. Classifiquem-los a partir del signe de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq 3 \\ < 0 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Així per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent. Cal tenir en compte que per $x = 2$ la funció no està definida. Així la funció és decreixement en: $(-\infty, 2) \cup (2,3)$ i és creixent en $(3, +\infty)$. Si es considera monotonia estricta caldria excloure també $x = 0$.

Com que en un entorn de $x = 0$ la funció és decreixent i és un punt crític, es tracta d'un punt d'inflexió.

En canvi per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent, per tant, en $x = 3$ fa un mínim relatiu.

b)

La funció és continua en l'interval $(-2,1)$ ja que és un quocient de polinomis, que són funcions contínues i el denominador no s'anul·la. Avaluem la funció en els extrems de l'interval:

$f(-2) = \frac{-8}{-4} = 2 > 0$ i $f(1) = \frac{1}{-1} = -1 < 0$

Pel teorema de Bolzano podem afirmar que f té com a mínim un zero en l'interval $(-2,1)$. Com que la funció és estrictament monòtona en aquest interval, només té un zero dins d'aquest interval. De fet, és fàcil veure que $f(0) = 0$.