2. ***a*)** Donada la funció $f(x)=\dfrac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$. Trobeu també l'equació de la recta normal a $y=f(x)$ en aquest mateix punt.
[1,25 punts]

***b*)** Feu un esbós de les gràfiques de la corba $y=f(x)$ i de la recta $4x+y=8$, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical $x=3$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

L'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt $x = 1$ és:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

Fem els càlculs:

$$f(x) = \frac{4}{x} \to f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

Així

$$f(1) = 4 \text{ i } f'(1) = -4$$

L'equació de la recta tangent demanada és:

$$y - 4 = -4 \cdot (x - 1) \to y = -4x + 8 \to 4x + y = 8$$

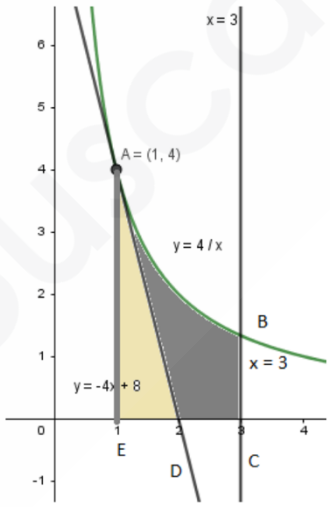
L'equació de la recta normal es pot calcular a partir de l'equació:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{-4} \cdot (x - 1) \to 4y - 16 = x - 1 \to x - 4y = -15$$

b)

Per fer l'esbós de la gràfica n'hi ha prou veient que:



- $x = 0$ no és del domini
- f és continua
- $f'(x) = -\frac{4}{x^2} < 0$, per tant, f és decreixent
- Els eixos de coordenades són rectes asímptotes a la funció.

La recta donada, és la recta tangent en el punt $(1,4)$.

L'àrea demanada és la regió $ABCD$, que es pot obtenir restant l'àrea del triangle ADE, de la regió $ABCE$:

$$A_T = \int_1^3 \frac{4}{x}\, dx - A_{ADE} = [4\, ln(x)]_1^3 - \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$= 4[(ln(3) - ln(1)] - 2 = 4\, ln(3) - 2 = 2{,}39u^2$$