1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 1$, i feu-ne una interpretació geomètrica.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Escrivim el sistema en forma matricial. La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ \underbrace{1 \quad 3 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem el determinant de la matriu A:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 4k - 3 = -(k-1)(k-3)$$

que s'anul·la per als valors de $k = 1$ i $k = 3$. Així,

- per a $k \neq 1$ i $k \neq 3$, el determinant de A no s'anul·la. Aleshores, $rang\ (A) = rang\ (A') = 3$, que també coincideix amb el número d'incògnites, i es tracta d'un sistema compatible determinat.
- per a $k = 1$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Les dues primeres equacions són idèntiques per tant, el $rang\ (A)$ i el $rang\ (A')$ no seran màxims.

Calculant rangs tenim que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3$. Tenim 3 incògnites, per tant, és un sistema compatible indeterminat.

En aquest cas, la primera i la tercera equació són idèntiques en la part de les incògnites però no en els termes independents, amb això ja podem afirmar que es tracta d'un sistema incompatible.

També es poden estudiar els rangs per veure que $rang(A) = 2 \neq rang(A') = 3$.

b)

Per a $k = 1$, el sistema és:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Com que la primera i la segona equació són iguals, se'n pot eliminar una: es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Prenem $z = t$, s'obté que la solució és: $x = \frac{7}{2} - t, y = \frac{1}{2}, z = t$ amb $t \in R$

Les dues primeres equacions del sistema, que són iguals, corresponen a un mateix pla. La tercera equació correspon a un pla que talla a l'anterior en una recta.

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible.
[1 punt]

b) Comproveu que, per al cas $a = 3$, la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{B}$ és la matriu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

Solució:

a)

Calculem el determinant de la matriu A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a(a^2 - 3a + 2) = a(a-1)(a-2)$$

Aleshores, per a tot $a \neq 0, 1, 2$ tenim que $|A| \neq 0$ i la matriu és invertible.

b)

Per $a = 3$ la matriu és $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

El determinant de la matriu A és $|A| = 6 \neq 0$, per tant, A és invertible. Calculem la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Així, podem resoldre l'equació donada, multiplicant per l'esquerra cada banda de l'equació per la matriu inversa de A:

$$A \cdot X = B - 3I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$