3. En $\mathbb{R}^3$ es donen els punts $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (4, 1, 2)$ i $D = (1, 1, t)$, en què t és un valor real.

a) Per a quin valor de t els quatre punts són coplanaris?
[1 punt]

b) Trobeu el valor de t per tal que el tetraedre (irregular) que formen els quatre punts tingui un volum de $5u^3$.
[1,5 punts]

Nota: El volum d'un tetraedre definit pels vectors $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ i $\boldsymbol{v_3}$ és igual a un sisè del valor absolut del determinant de la matriu formada per tots tres vectors,

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3})\right|.$$

Solució:

a)

Quatre punts són coplanaris si pertanyen al mateix pla. Considerem els tres vectors que tenen origen en un dels punts, per exemple, el punt B i extrem en cada un dels altres tres punts:

$\overrightarrow{BA} = (3,1,0)$, $\overrightarrow{BC} = (4,1,1)$ i $\overrightarrow{BD} = (1,1,t-1)$

Per a que els quatre punts siguin coplanaris, cal que aquests tres vectors siguin linealment dependents, és a dir:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = 3t - 3 + 1 - (3 + 4t - 4) = -t - 1 = 0 \to t = -1$$

Així per $t = -1$ els quatre punts donats són coplanaris.

b)

Per $t \neq -1$, els quatre punts no són coplanaris, per tant, formaran un tetraedre.

Per calcular-ne el volum fem servir la fórmula $V = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)\right|$:

Així, $V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix}\right| = \frac{|-t-1|}{6}$

Atès que volem trobar t tal que $V = 5u^3$ tenim que:

$$V = \frac{|-t-1|}{6} = 5 \to |-t-1| = 30 \to \begin{cases} -t-1 = 30 \\ -t-1 = -30 \end{cases} \to \begin{cases} t = -31 \\ t = 29 \end{cases}$$

De manera que tenim dues solucions: $t = -31$ i $t = 29$.