Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudieu la concavitat de la funció.
[0,75 punts]

c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a.

[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	c	
	Total	

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real *a*:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *a*.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Sigui la recta r definida per l'expressió següent:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a) Determineu la posició relativa de la recta r respecte al pla $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si és paral·lela, calculeu la distància de r a π, i si és secant, calculeu el punt de tall.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talla la recta r en un punt P, la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. ***a*)** Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt $(0, 5)$, que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

***b*)** Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval $(0, 4)$. Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

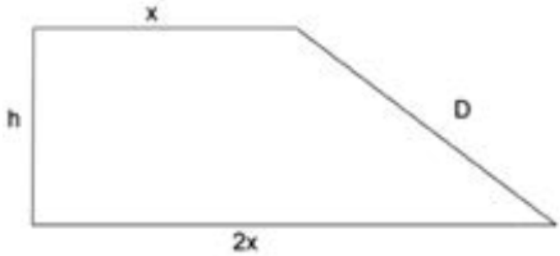
5. Sigui la matriu $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depèn dels paràmetres a, b i c.

***a*)** Calculeu les matrius $\boldsymbol{X}$ tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

***b*)** Determineu els valors de a, b i c perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{X}$ sigui $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h = \dfrac{20}{x}$ i $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$.
[1 punt]

b) Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat *D* és mínima.
[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

Etiqueta de l'alumne/a

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Siguin les matrius $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

***a*)** Comproveu que $\boldsymbol{C}^3=\boldsymbol{I}_2$, en què $\boldsymbol{I}_2$ és la matriu identitat d'ordre 2, i deduïu que la matriu $\boldsymbol{C}$ és invertible i que $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^2$. Calculeu $\boldsymbol{C}^{2022}$.

[1,5 punts]

***b*)** Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_2$.
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.

a) Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).

[1,25 punts]

***b*)** Feu un esbós de la gràfica de la funció *f* i la recta *t*. Calculeu el valor de *a* perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció *f*, la recta *t* i l'eix de les abscisses sigui $108\ u^2$.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ my + (3-m)z &= -6 \\ 2x - y + mz &= 6 \end{aligned}\right\},$$

en què m és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.

[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema, si és possible, quan $m = 0$ i quan $m = 3$. En cada cas, doneu la posició relativa dels tres plans a $\mathbb{R}^3$.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ i $B = (0, y)$, amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.

a) Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?

[1,25 punts]

b) Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.

a) Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b), sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

Esquema del programa	*Exemple*
1. Escriure «Introduïu un valor a»	L'usuari introdueix $a = 0{,}5$
2. Escriure «Introduïu un valor b»	L'usuari introdueix $b = 2$
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$»	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0{,}5) * f(1{,}25) = (0{,}5 + \ln(0{,}5)) * (1{,}25 + \ln(1{,}25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1{,}25$
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: *a* *b* inici 0,5 2 iteració 1 0,5 1,25 iteració 2 0,5 0,875 iteració 3 0,5 0,6875 iteració 4 0,5 0,59375 iteració 5 0,546875 0,59375 iteració 6 0,546875 0,5703125 iteració 7 0,55859375 0,5703125 […]
7. Quan $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c» i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»

a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

[1,25 punts]

b) Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b, per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

Etiqueta de l'alumne/a

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés