Sèrie 2

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella amb el número corresponent de la primera pàgina de l'examen.

1.

a)

[1,75 punts]

Anomenem x, y i z les unitats elaborades de l'opció clàssica, de rams petits i de rams grans, respectivament.

A partir de les condicions de l'enunciat s'obté el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+3y+6z = 200 \\ x+2y+3z = 135 \\ x+y+z = 85 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 1 & 1 & 85 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 3 & 6 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

S'obté que $z = 15$, $y = 20$ i $x = 50$.

Per tant, s'han elaborat 50 unitats de l'opció clàssica, 20 rams petits i 15 rams grans.

b)

[0,75 punts]

Per saber els diners que ingressaran amb la venda de tots els rams hem de fer el producte $50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 150 + 100 + 150 = 400$.

S'obtindran, per tant, 400 euros de la venda de tots els rams.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació. Resolució del sistema: 1 p. b) Obtenció del diners que ingressaran: 0,75 p.

2.

a)

[1,25 punts]

La funció f té com a gràfica una paràbola que pren el valor màxim al vèrtex, ja que el coeficient de x^2 és negatiu. Per trobar l'interval de temperatures entre les quals es produeix fruita només cal trobar els zeros de l'equació:

$$-x^2 + 46x - 360 = 0$$

La fórmula de l'equació de segon grau ens dona com a solucions $x = 10$ i $x = 36$, és a dir, que el rang de temperatures entre les quals es produeix fruita és $(10, 36)$.

Si es mantingués l'hivernacle a 20 graus, s'obtindrien anualment $f(20) = 160$ centenars de quilograms per hectàrea i any. Per tant, els ingressos per hectàrea serien de 16.000 · 1,2 = 19.200 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar la producció màxima, ens cal trobar el màxim de la funció anterior. Podem fer-ho calculant el vèrtex, o bé amb la funció derivada $f'(x) = -2x + 46$. Els candidats a extrems de la funció es produeixen quan $f'(x) = 0$, per tant, quan $x = 23$. En aquest cas verifiquem fàcilment que $f'(x) > 0$ quan $x < 23$ i que $f'(x) < 0$ quan $x > 23$ i, per tant, en el punt $\left(23, f(23)\right) = (23, 169)$ la funció assoleix un màxim. Així doncs, la temperatura que maximitza la producció són 23 graus centígrads, i en aquest cas es produeixen 16.900 quilograms per hectàrea. Els ingressos per hectàrea són de 16.900 · 1,2 = 20.280 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció del rang de temperatures: 0,75 p. Obtenció de la producció a 20 graus: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de la producció a aquesta temperatura: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p.

3.

a)

[1,75 punts]

Resumim la informació en la taula següent:

Tipus de panera	Pernils per panera	Ampolles de cava per panera	Barres de torró per panera	Quantitat de paneres que hem de fer
A	1	1	5	x
B	2	3	2	y

Les condicions que tenim són:

x indica la quantitat de paneres de tipus A que hem de fer: $x \geq 0$

y indica la quantitat de paneres de tipus B que hem de fer: $y \geq 0$

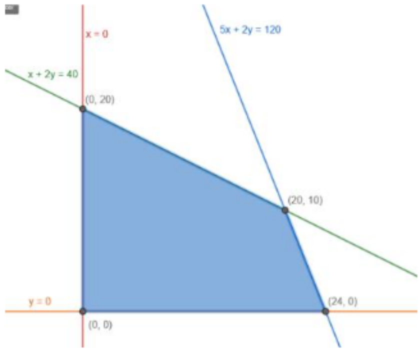
Disposem de 40 pernils, per tant: $x + 2y \leq 40$

Disposem de 120 barres de torró, per tant: $5x + 2y \leq 120$

Es vol fer la màxima la quantitat de paneres possible. Per tant, la funció objectiu és: $f(x, y) = x + y$, amb les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Obtenim de la regió factible:



La regió factible està delimitada pels punts:

$$(0,0), (24,0), (20,10), (0,20)$$

Sabem que la funció objectiu assolirà el seu màxim en algun vèrtex de la regió factible. La taula següent recull el valor de la funció objectiu sobre cadascun dels vèrtexs:

Punts	$f(x,y) = x + y$
$(0,0)$	0
$(24,0)$	24
$(20,10)$	30
$(0,20)$	20

La funció objectiu $f(x,y) = x + y$ assoleix el valor màxim en el vèrtex $(20,10)$. Per tant, per maximitzar la quantitat de paneres, cal fer-ne 20 de tipus A i 10 de tipus B. D'aquesta manera obtindrem 30 paneres per als treballadors.

b)

[0,75 punts]

En aquest cas hem d'imposar que el nombre de paneres de cada tipus ha de ser igual. Per tant, ara tenim:

Tipus de panera	Pernils per panera	Ampolles de cava per panera	Barres de torró per panera	Quantitat de paneres que hem de fer
A	1	1	5	x
B	2	3	2	x

Si anomenem x la mateixa quantitat de paneres de cada tipus, ara tenim:

$$\begin{cases} x + 2x \leq 40 \\ 5x + 2x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 40/3 \\ x \leq 120/7 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 13{,}3 \\ x \leq 17{,}1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per tant, es podran fer només 13 paneres de cada tipus i hi haurà paneres només per a 26 treballadors.

Criteris de correcció: a) Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Dibuix de la regió factible: 0,25 p. Obtenció dels vèrtex: 0,5 p. Obtenció del màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució: 0,5 p.

4.

a)

[1,25 punts]

A l'instant inicial la població és de 6 centenars, per tant, $P(0) = 6$:

$$a + \frac{12 \cdot 0}{0^2 + b} = 6$$

Per tant, obtenim que $a = 6$.

D'altra banda, sabem que el màxim de la població s'assoleix a l'instant $t = 2$, per tant, $P'(2) = 0$. Calculem la derivada:

$$P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + b) - 12t \cdot 2t}{(t^2 + b)^2} = \frac{-12t^2 + 12b}{(t^2 + b)^2}$$

Imposem que $P'(2) = 0$:

$$\frac{-12 \cdot 2^2 + 12b}{(2^2 + b)^2} = 0$$

D'aquí obtenim que $-48 + 12b = 0$ i, per tant, $b = 4$.

Així, per tal que es compleixin les condicions del problema cal que $a = 6$ i $b = 4$.

D'altra banda, observem que amb aquests valors dels paràmetres efectivament en $t = 2$ hi ha un màxim perquè la derivada és positiva en l'interval $[0,2)$ i negativa per a $t > 2$.

b)

[1,25 punts]

La població obté el seu màxim a l'instant $t = 2$:

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$$

Per tant, la població màxima és de 9 centenars de bacteris.

Calculem ara el límit per obtenir la població a llarg termini:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \ 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + 0 = 6$$

Criteris de correcció: a) Obtenció del valor de a: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0, 5 p. Obtenció del valor de b: 0,25 p. b) Obtenció de la població màxima: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,75 p.

5.

a)

[1,5 punts]

Calculem el producte P · A:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que una matriu quadrada és invertible si el rang de la matriu és màxim, és a dir, en aquest cas si el rang és 2.

Apliquem el mètode de Gauss. Si sumem a la segona fila la primera multiplicada per $(3-a)$, obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8-5a \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu serà 2 i, per tant, la matriu $P \cdot A$ serà invertible sempre que $8-5a$ sigui diferent de zero. Com que $5a-8=0 \quad \rightarrow \quad a=8/5$ Obtenim que sempre que $a \neq \frac{8}{5}$ la matriu obtinguda del producte de $P \cdot A$ serà invertible.

b)

[1 punt]

Quan $a=2$ tenim que

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre l'equació *P·A+X = I.* Obtenim:

$$X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul dels producte P·A: 0,5 p. Càlcul del rang de la matriu: 0,5 p. Obtenció del valor de a pel qual no és invertible: 0,5 p. b) Aïllar la X: 0,5 p. Càlcul de X: 0,5 p.

6

a)

[0,75 punts]

Sabem que $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 15 \cdot (1 - 0{,}95) = 15 \cdot 0{,}05 = 0{,}75$. Com que aquest valor és inferior a 1, segons el model, no hi ha risc d'una epidèmia de xarampió.

b)

[0,75 punts]

En el cas de la grip espanyola $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 4 \cdot (1 - p)$. Imposem que

$$4 \cdot (1 - p) < 1$$

Aïllant la p tenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Per tant, caldria vacunar més d'un 75% de la població per aturar l'epidèmia.

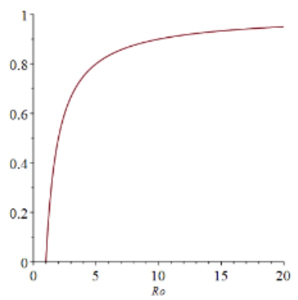
c)

[1 punt]

El llindar de vacunació és donat per $R_0 \cdot (1 - p) < 1$. Aïllant, obtenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{R_0}$. Per tant, la funció que ens determina el llindar del mínim de vacunació necessària, en funció de R_0, és $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$.

Per fer un esbós de la funció entre 1 i 20 podem buscar els valors de la funció en els dos extrems $p(1) = 0$ i $p(20) = \frac{19}{20} = 0.95$. També veiem que la funció és sempre creixent perquè la derivada és $p'(R_0) = \frac{1}{R_0^2} > 0$ i, per tant, no té extrems relatius.

La gràfica de la funció és:



Criteris de correcció: a) Càlcul i justificació que no hi ha risc d'epidèmia en aquest cas: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul: 0,5 p. c) Obtenció de la funció: 0,5 p. Esbós de la funció: 0,5 p.

SÈRIE 5

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.

- Cal arrodonir la nota final de l'examen, no les notes parcials.

- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella amb el número corresponent de la primera pàgina de l'examen.

1.

a)

[1,25 punts]

Si realitzem el producte de la funció obtenim que $f(t) = -t^2 + 50t + 1875$. Calculem la primera derivada $f'(t) = -2t + 50$. Si igualem la primera derivada a 0 obtenim que hi ha un possible extrem relatiu en $t = 25$. Observem que la derivada $f'(t)$ és positiva per valors de t inferiors a $t = 25$ i és negativa per valors de t més grans. Per tant $f(t)$ creix a l'interval $(-\infty, 25)$ i decreix a l'interval $(25, +\infty)$. Això vol dir que en $t = 25$ té un màxim relatiu i el seu valor és $f(25) = 2.500$. Al cap de 25 mesos assoleix el seu valor màxim i aquest valor és de 2.500 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar l'instant t en el que el producte val 475 euros hem de resoldre l'equació $f(t) = 475$. Obtenim $-t^2 + 50t + 1.875 = 475$, és a dir,
$-t^2 + 50t + 1.400 = 0$.

Si resolem aquesta equació de segon grau obtenim $t = -20$, que no té sentit en el nostre context i $t = 70$. Per tant es deixarà de comercialitzar al cap de 70 mesos.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció dels intervals: 0,25 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25p. Valor del producte en el màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Resolució: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleixen els 475 euros: 0,25 p.

2.

a)

[1,25 punts]

Anomenem x, y, z la quantitat de monedes que hi ha a la caixa de cinquanta cèntims, d'un euro i de dos euros, respectivament.

Plantegem el sistema d'equacions lineals que es desprèn de modelitzar el que diu l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 40 \\ x & = & 2z \end{cases}$$

Aquest sistema d'equacions lineals és compatible indeterminat amb solucions:

$$x = 2z$$

$$y = 40 - 3z$$

z paràmetre

El sistema és indeterminat i, per tant, no es pot determinar la quantitat exacta de monedes que hi ha de cada tipus.

b)

[1,25 punts]

El valor total de les monedes de la caixa és $0{,}5x + y + 2z$. Si substituïm pels valors que hem trobat a l'apartat anterior tenim $0{,}5 \cdot 2z + (40 - 3z) + 2z = 40$ euros.

Criteris de correcció:
a) Obtenció del sistema: 0,5 p. Resolució i justificació de que és un sistema indeterminat: 0,75 p.
b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor total: 0,75 p.

3.

[2,5 punts]

Considerem la igualtat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Fent el primer producte de matrius tenim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Si ara realitzem el segon producte obtenim

$$\begin{pmatrix} a-b & 2a-3b \\ a-b-c & 2a-3b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre, per tant, el sistema

$$\begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-3b=-2 \\ a-b-c=-3 \\ 2a-3b-3c=-8 \end{cases}$$

Si el resolem per el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtenim per tant la solució $c = 2$, $b = 0$ i $a = -1$. Per tant, la matriu que buscàvem és

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: Plantejament del producte de matrius: 0,5 punts. Càlcul dels dos productes de matrius. 0,5 punts cadascun. Plantejament del sistema d'equacions: 0,5 punts. Resolució del sistema d'equacions: 0,5 punts.

4.

a)

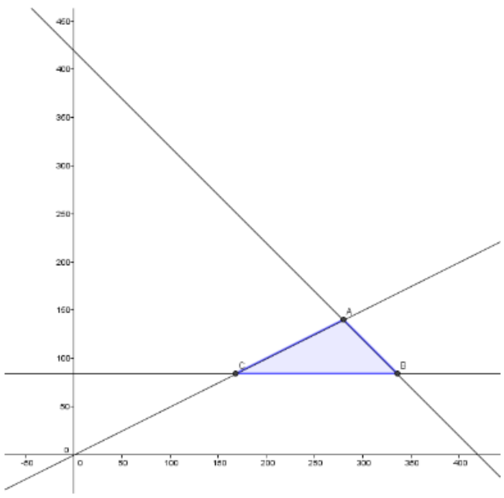
[1,25 punts]

Denotem per x el nombre d'habitacions reservades amb la tarifa estàndard i per y el nombre d'habitacions reservades amb la tarifa reduïda. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 84 \\ x + y \leq 420 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = 120x + 90y$

i la regió factible serà:



b)

[1,25 punts]

Els vèrtexs de la regió factible són $A = (280{,}140)$, $B = (336{,}84)$ i $C = (168{,}84)$. Avaluant la funció objectiu als tres vèrtexs s'obté $F(A) = 46.200, F(B) = 47.880$ i $F(C) = 27.720$. Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté reservant 336 habitacions a la tarifa estàndard i 84 a la reduïda i aquest benefici és de 47.880 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,75 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

5.

a)

[0,75 punts]

Els ingressos venen donats per la funció $I(x) = 58\,x$ (en milers d'euros). Per tant la funció que dona els beneficis mensuals en funció de les unitats produïdes serà:

$B(x) = I(x) - C(x) = 58\,x - (\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\frac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704.$

b)

[1 punt]

Resolent l'equació $-\frac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704 \quad = 0$ determinem que la funció $B(x)$ és positiva, i per tant l'empresa no tindrà pèrdues, quan el nombre d'unitats produïdes estigui dins l'interval $[48{,}196]$.

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0, \infty)$. Derivant obtenim $B'(x) = -x + 122,$ i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 122.$ Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0{,}122)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 122$. En el punt on s'assoleix el màxim el benefici obtingut és de $B(122) = 2.738$ milers d'euros.

c)

[0,75 punts]

Denotem per a el nou preu de venta en milers d'euros. La nova funció de beneficis serà

$F(x) = I(x) - C(x) = a\,x - (\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\frac{1}{2}x^2 + (64 + a)\,x - 4.704.$

Observem que és una paràbola i que el màxim s'assolirà en el seu vèrtex. Aplicant la fórmula del vèrtex de la paràbola obtenim l'equació

$$\frac{-(64 + a)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 130$$

És a dir, $64 + a = 130$ i per tant cal que $a = 66$. El nou preu de venda haurà de ser per tant de 66.000 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de beneficis: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval per no tenir pèrdues: 0,25p. Obtenció del valor pel qual s'obté el benefici màxim: 0,25p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p. c) Plantejament: 0,25 p. Obtenció del nou preu de venda: 0,75 p.

6.

a)

[1,25 punts]

Comencem calculant la derivada $f'(x) = 3e^{3x}$. Per tant, el pendent en el punt d'abscissa $x = 0$ serà $f'(0) = 3$.

b)

[1,25 punts]

Quan $x = 0$, la funció pren el valor $f(0) = e^0 = 1$. Per tant, hem de calcular la recta tangent en el punt $(0,1)$. Sabem que el pendent és $m = 3$. Per tant la recta és de la forma $y = 3x + n$. Per trobar el valor de la constant n utilitzem que ha de passar pel punt $(0,1)$. Per tant $1 = 3 \cdot 0 + n$, és a dir, n=1.

Així doncs la recta tangent que estàvem buscant és $y = 3x + 1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,75 p. b) Càlcul del valor de l'ordenada en el punt d'abscissa x=0: 0,5 p. Obtenció de la recta tangent: 0,75 p.