SÈRIE 3

1.

a) Els beneficis són la diferència entre els ingressos obtinguts per la venda i els costos de producció, és a dir, $B(x) = I(x) - C(x)$. Els ingressos obtinguts per la venda de x unitats són $I(x) = x \cdot p(x) = 47x - 0{,}06x^2$. Per tant:

$$B(x) = 47x - 0{,}06x^2 - 0{,}02x^2 - 3x - 100 = -0{,}08x^2 + 44x - 100$$

b) Per saber quantes unitats cal produir per obtenir el benefici màxim comencem calculant la derivada:

$$B'(x) = -0{,}16x + 44$$

Igualem la derivada a zero per trobar els extrems relatius:

$$B'(x) = -0{,}16x + 44 = 0$$

Així doncs, tenim un extrem relatiu per $x = 275$ unitats.

Veiem que es tracta d'un màxim, ja que la funció de beneficis és una paràbola amb el coeficient principal negatiu. També podem argumentar-ho veient que la derivada és positiva per a valors inferiors a 275 i, per tant, la funció és creixent; mentre que és negativa per a valors superiors i, per tant, els beneficis decreixen.

El benefici màxim que s'obté és:

$$B(275) = 5.950 \text{ €}$$

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 punts. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,5 punts. Obtenció de la funció de beneficis: 0,5 punts. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 punts.

2.

a) Anomenem x, y i z la quantitat de quilòmetres recorreguts en autocar, a peu i en taxi, respectivament.

L'enunciat planteja tres condicions que es tradueixen en les equacions següents:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y+z}{2} \\ y = \dfrac{x+y+z}{20} \\ x = z+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-19y+z=0 \\ x-z=5 \end{cases}$$

a) Resolent pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -19 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \end{array}\right)$$

Per tant, obtenim $z = 45$, $y = 5$ i $x = 50$. Així doncs, va fer 50 km en autocar, 5 km a peu i 45 km en taxi.

b) Sabem que l'autocar circulava a 100 km/h, en Martí caminava a 5 km/h i el taxi anava a 90 km/h. Per tant, per saber el temps total que va trigar hem de calcular:

$$50 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 45 \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2 \text{ hores.}$$

En total, va trigar dues hores a completar el trajecte.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 punts cada equació. Resolució: 1 punt. b) Plantejament: 0,5 punts. Càlcul: 0,25 punts.

3.

a) Per saber quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana hem de calcular $f(1) = \frac{240 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = 80$. Per tant, la primera setmana es preveu que hi vagin $80 \cdot 10 = 800$ persones (recordeu que la funció és expressada en desenes de persones).

La taxa de variació mitjana entre les setmanes 1 i 4 és donada per:

$$TVM_f[1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{80 - 80}{3} = 0.$$

Aquesta taxa ens dona zero, perquè tant a la primera setmana com a la quarta s'espera el mateix nombre de visitants.

b) Busquem el màxim de la funció. Per fer-ho, calculem la derivada i la igualem a zero:

$$f'(x) = \frac{240 \cdot (x^2 - 2x + 4) - 240x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{-240x^2 + 960}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Quan igualem a zero la derivada veiem que s'anul·la en els punts $x = 2$ i $x = -2$. Descartem la solució negativa, perquè no té sentit en el context del problema, i observem que en $x = 2$ hi ha un màxim, ja que abans del punt $x = 2$ la derivada és positiva i després del punt $x = 2$ la derivada és negativa.

Per tant, el màxim de visitants setmanals s'assolirà durant la segona setmana.

Per saber el nombre de visitants durant la segona setmana, calculem la imatge de 2:

$$f(2) = \frac{240 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = 120$$

Per tant, durant la segona setmana el nombre de visitants previst és de $120 \cdot 10 = 1.200$ persones.

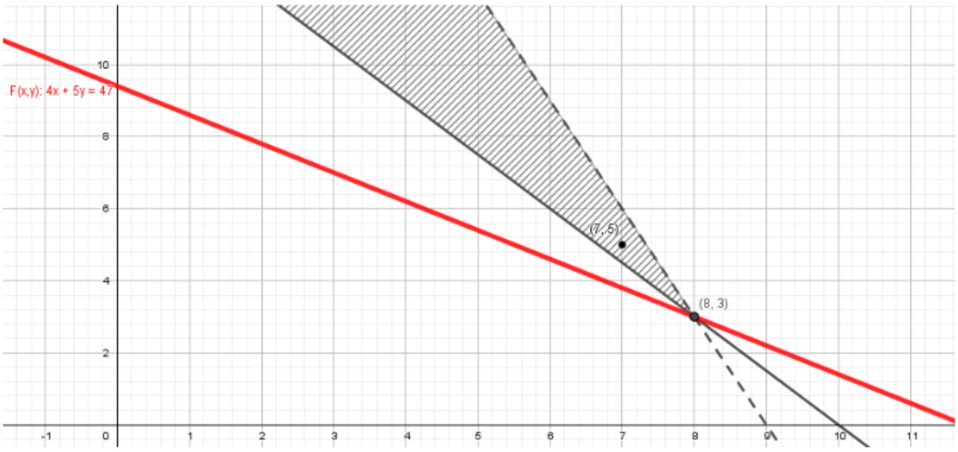
Criteris de correcció: a) Càlcul del nombre de visitants de la primera setmana: 0,5 punts. Càlcul de la TVM: 0,5 punts. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre de visitants: 0,25 punts.

4.

a) La funció objectiu, que volem minimitzar, és $F(x, y) = 4x + 5y$. Les inequacions que defineixen la regió factible són:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y \ \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 60 \end{array}\right\}$$

Aquestes equacions defineixen la regió factible següent:



Observem en el gràfic que aquesta funció no té màxim, ja que el recinte de validesa és infinit i la funció objectiu pot créixer indefinidament. En canvi, assoleix el mínim en el vèrtex (8, 3). Per tant, la solució és 8 grays de raigs de cobalt i 3 grays de raigs de cesi.

b) El punt (7, 5) compleix totes les inequacions, ja que $3 \cdot 7 + 5 = 26 < 27$ i $6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 62 > 60$ i, a més a més, 7 i 5 són valors positius. Però $F(7,5) = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 = 53$ és més gran que $F(8,3) = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 47$, que és el valor de la funció objectiu al punt solució de l'apartat *a*.

Criteris de correcció: a) Identificació de la funció objectiu: 0,25 punts. Identificació de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció del mínim: 0,25 punts. b) Comprovació que el punt (7, 5) satisfà les restriccions: 0,5 punts. Justificació que és un tractament pitjor: 0,5 punts.

5.

a) Comencem calculant els productes de les dues matrius:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Observem que, perquè les dues matrius siguin iguals, cal que $1 - a = 0$, és a dir, que $a = 1$.

Quan $a = 1$, observem que:

$$A \cdot B = B \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

b) Sabem que es compleix la igualtat $A \cdot B = 2 \cdot I$. Si multipliquem per ½ als dos costats de la igualtat, tenim que:

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot I = I$$

Així doncs, d'una banda, tenim que $\left(\frac{1}{2} \cdot A\right) \cdot B = I$, i per tant:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, tenim també que:

$$A \cdot \frac{1}{2} \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot B\right) = I$$

Així que:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul del valor de a: 0,75 punts. Comprovació de la igualtat: 0,5 punts. b) Si han calculat una de les dues matrius inverses: 0,75 punts; si les han calculat totes dues: 1,25 punts.

6.

a) Segons l'enunciat, la funció $f(x)$ verifica que $f(0) = -2.000$, $f\,'(10) = 0$ i $f\,'(20) = 0$.

D'altra banda, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Per tant, les equacions que s'han de verificar són:

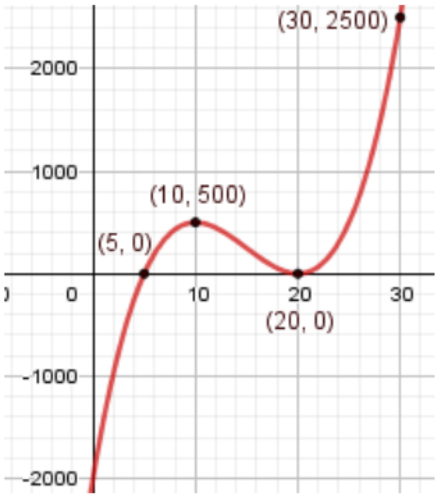
$$\left.\begin{array}{lcr} f(0) = -2.000 & \Rightarrow & c = -2.000 \\ f\,'(10) = 0 & \Rightarrow & 300 + 20a + b = 0 \\ f\,'(20) = 0 & \Rightarrow & 1.200 + 40a + b = 0 \end{array}\right\}$$

Així, tenim que:

$$300 + 20\,a = 1.200 + 40\,a \quad \Rightarrow \quad -900 = 20\,a \quad \Rightarrow \quad a = -45$$

I, també, que: $b = -300 - 20 \cdot (-45) = 600.$

b) A l'apartat anterior hem obtingut que la funció que preveu els beneficis que s'obtindran és $f\ (x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2.000$.



El millor dia per vendre les accions serà el valor on s'assoleix el màxim absolut d'aquesta funció definida en l'interval (0, 30).

Aquest valor s'assolirà o bé quan x = 10 (màxim relatiu) o bé en els extrems de l'interval de definició. Observem que:

$$f(10) = 500\ €$$

$$f(0) = -2.000\ €$$

$$f(30) = 2.500\ €$$

Per tant, el millor dia per vendre les accions serà el trentè dia i obtindrà uns beneficis de 2.500 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul dels paràmetres a, b i c: 0,5 punts cadascun. b) Obtenció del màxim absolut de manera justificada: 0,75 punts. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 punts.