4. Un grup de biòlegs està estudiant un cultiu de bacteris. La població d'aquests bacteris (en centenars) és donada per la funció $P(t) = a + \dfrac{12t}{t^2 + b}$, en què a i b són constants positives reals i $t \geq 0$ és el temps transcorregut en minuts.

Sabem que a l'instant inicial de l'estudi la població de bacteris era de 6 centenars i que el valor màxim de població s'ha assolit al cap de 2 minuts d'haver iniciat l'estudi.

a) Trobeu els valors de les constants a i b.
[1,25 punts]

b) Calculeu la població màxima de bacteris i estudieu-ne el comportament a llarg termini, és a dir, cap a quin valor s'estabilitza el nombre de bacteris.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

A l'instant inicial la població és de 6 centenars, per tant, $P(0) = 6$:

$$a + \frac{12 \cdot 0}{0^2 + b} = 6$$

Per tant, obtenim que $a = 6$.

D'altra banda, sabem que el màxim de la població s'assoleix a l'instant $t = 2$, per tant, $P'(2) = 0$. Calculem la derivada:

$$P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + b) - 12t \cdot 2t}{(t^2 + b)^2} = \frac{-12t^2 + 12b}{(t^2 + b)^2}$$

Imposem que $P'(2) = 0$:

$$\frac{-12 \cdot 2^2 + 12b}{(2^2 + b)^2} = 0$$

D'aquí obtenim que $-48 + 12b = 0$ i, per tant, $b = 4$.

Així, per tal que es compleixin les condicions del problema cal que $a = 6$ i $b = 4$.

D'altra banda, observem que amb aquests valors dels paràmetres efectivament en $t = 2$ hi ha un màxim perquè la derivada és positiva en l'interval $[0,2)$ i negativa per a $t > 2$.

b)

[1,25 punts]

La població obté el seu màxim a l'instant $t = 2$:

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$$

Per tant, la població màxima és de 9 centenars de bacteris.

Calculem ara el límit per obtenir la població a llarg termini:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \ 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + 0 = 6$$

Criteris de correcció: a) Obtenció del valor de a: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0, 5 p. Obtenció del valor de b: 0,25 p. b) Obtenció de la població màxima: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,75 p.

6. En els models matemàtics que s'utilitzen per a descriure l'evolució d'una malaltia, s'anomena R_0 el nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada provoca en la població. Quan aquest nombre és inferior a 1, cada individu infectat transmet la malaltia, de mitjana, a menys d'una persona i la malaltia tendeix a desaparèixer. En canvi, si R_0 és més gran que 1, la malaltia s'estén i es produeix una epidèmia.

Quan es descobreix una vacuna efectiva contra la malaltia, es pot controlar l'epidèmia vacunant només una proporció p de la població. És el que es coneix com a *immunitat de grup*. Efectivament, un cop vacunada una proporció $p \in (0, 1)$ de la població, la nova R_0, que s'anomena *efectiva* i es denota amb R_e, és el producte de la R_0 original per la proporció d'individus que no estan vacunats, $1 - p$. I s'aconsegueix controlar l'epidèmia si la R_e és inferior a 1.

***a*)** En el cas del xarampió, s'estima que $R_0 = 15$. Si analitzem una població amb un percentatge d'individus vacunats del 95 %, segons el model descrit, hi ha risc que es produeixi una epidèmia de xarampió en aquesta població?
[0,75 punts]

***b*)** En el cas concret de l'anomenada *grip espanyola* del 1918, s'estima que $R_0 = 4$. Calculeu quin percentatge de població hauria calgut vacunar, com a mínim, per a aturar l'epidèmia d'aquesta malaltia.
[0,75 punts]

***c*)** Expresseu, en general, el llindar de població mínima que cal vacunar en funció del valor R_0 d'una malaltia. Feu un esbós d'aquesta funció per als valors de R_0 entre 1 i 20.
[1 punt]

Solució:

a)

[0,75 punts]

Sabem que $R_e = R_0 \cdot (1-p) = 15 \cdot (1-0{,}95) = 15 \cdot 0{,}05 = 0{,}75$. Com que aquest valor és inferior a 1, segons el model, no hi ha risc d'una epidèmia de xarampió.

b)

[0,75 punts]

En el cas de la grip espanyola $R_e = R_0 \cdot (1-p) = 4 \cdot (1-p)$. Imposem que

$$4 \cdot (1-p) < 1$$

Aïllant la p tenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Per tant, caldria vacunar més d'un 75% de la població per aturar l'epidèmia.

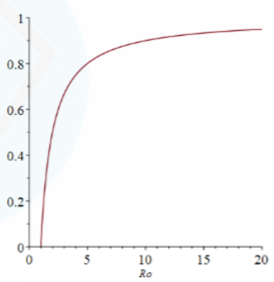
c)

[1 punt]

El llindar de vacunació és donat per $R_0 \cdot (1-p) < 1$. Aïllant, obtenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{R_0}$. Per tant, la funció que ens determina el llindar del mínim de vacunació necessària, en funció de R_0, és $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$.

Per fer un esbós de la funció entre 1 i 20 podem buscar els valors de la funció en els dos extrems $p(1) = 0$ i $p(20) = \frac{19}{20} = 0.95$. També veiem que la funció és sempre creixent perquè la derivada és $p'(R_0) = \frac{1}{R_0^2} > 0$ i, per tant, no té extrems relatius.

La gràfica de la funció és:



Criteris de correcció: a) Càlcul i justificació que no hi ha risc d'epidèmia en aquest cas: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul: 0,5 p. c) Obtenció de la funció: 0,5 p. Esbós de la funció: 0,5 p.

6. Considereu la funció $f(x) = e^{3x}$.

a) Calculeu el pendent de la recta tangent a la gràfica d'aquesta funció en el punt d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

b) Obteniu l'equació d'aquesta recta tangent.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

Comencem calculant la derivada $f'(x) = 3e^{3x}$. Per tant, el pendent en el punt d'abscissa $x = 0$ serà $f'(0) = 3$.

b)

[1,25 punts]

Quan $x = 0$, la funció pren el valor $f(0) = e^0 = 1$. Per tant, hem de calcular la recta tangent en el punt $(0{,}1)$. Sabem que el pendent és $m = 3$. Per tant la recta és de la forma $y = 3x + n$. Per trobar el valor de la constant n utilitzem que ha de passar pel punt $(0{,}1)$. Per tant $1 = 3 \cdot 0 + n$, és a dir, n=1.

Així doncs la recta tangent que estàvem buscant és $y = 3x + 1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,75 p. b) Càlcul del valor de l'ordenada en el punt d'abscissa x=0: 0,5 p. Obtenció de la recta tangent: 0,75 p.