1. A l'institut d'en Martí han elaborat tres tipus diferents de rams de roses per a vendre el dia de Sant Jordi. L'opció clàssica consisteix en una rosa i una espiga. L'opció de ram petit està formada per tres roses i dues espigues. I, finalment, l'opció de ram gran consisteix en mitja dotzena de roses i tres espigues. Tots els rams (siguin de l'opció que siguin) porten un bonic embolcall. Sabem que s'han utilitzat 200 roses, 135 espigues i 85 embolcalls.

a) Quants rams s'han elaborat de cada tipus?
[1,75 punts]

b) Si el preu de venda d'un ram de l'opció clàssica és de 3 euros, el d'un ram petit és de 5 euros i el d'un ram gran és de 10 euros, quants diners s'ingressaran si es venen tots?
[0,75 punts]

Solució:

1.

a)

[1,75 punts]

Anomenem x, y i z les unitats elaborades de l'opció clàssica, de rams petits i de rams grans, respectivament.

A partir de les condicions de l'enunciat s'obté el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \\ x + y + z = 85 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 1 & 1 & 85 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 3 & 6 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

S'obté que $z = 15$, $y = 20$ i $x = 50$.

Per tant, s'han elaborat 50 unitats de l'opció clàssica, 20 rams petits i 15 rams grans.

b)

[0,75 punts]

Per saber els diners que ingressaran amb la venda de tots els rams hem de fer el producte $50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 150 + 100 + 150 = 400.$

S'obtindran, per tant, 400 euros de la venda de tots els rams.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació. Resolució del sistema: 1 p. b) Obtenció del diners que ingressaran: 0,75 p.

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a és invertible la matriu obtinguda del resultat del producte $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$.
[1,5 punts]

b) Si $a=2$, trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ denota la matriu identitat d'ordre 2.
[1 punt]

Solució:

a)

[1,5 punts]

Calculem el producte P · A:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que una matriu quadrada és invertible si el rang de la matriu és màxim, és a dir, en aquest cas si el rang és 2.

Apliquem el mètode de Gauss. Si sumem a la segona fila la primera multiplicada per $(3-a)$, obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8-5a \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu serà 2 i, per tant, la matriu $P \cdot A$ serà invertible sempre que $8-5a$ sigui diferent de zero. Com que $5a-8=0 \quad \rightarrow \quad a = 8/5$
Obtenim que sempre que $a \neq \frac{8}{5}$ la matriu obtinguda del producte de $P \cdot A$ serà invertible.

b)

[1 punt]

Quan $a = 2$ tenim que

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre l'equació *P·A+X = I*. Obtenim:

$$X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul dels producte P·A: 0,5 p. Càlcul del rang de la matriu: 0,5 p. Obtenció del valor de a pel qual no és invertible: 0,5 p. b) Aïllar la X: 0,5 p. Càlcul de X: 0,5 p.

2. Una capsa conté 40 monedes, que són de 50 cèntims, d'1 € i de 2 €. Sabem que el nombre de monedes de 50 cèntims que hi ha és el doble que el de monedes de 2 €.

***a*)** Podem saber el nombre de monedes que hi ha de cada tipus? En cas afirmatiu, calculeu-lo. En cas negatiu, doneu la solució en funció d'un paràmetre.
[1,25 punts]

***b*)** Esbrineu si es pot calcular el valor total, en euros, de les monedes de la capsa. En cas afirmatiu, calculeu-lo.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

Anomenem x, y, z la quantitat de monedes que hi ha a la caixa de cinquanta cèntims, d'un euro i de dos euros, respectivament.

Plantegem el sistema d'equacions lineals que es desprèn de modelitzar el que diu l'enunciat:

$$\begin{cases} x+y+z & = & 40 \\ x & = & 2z \end{cases}$$

Aquest sistema d'equacions lineals és compatible indeterminat amb solucions:

$$x = 2z$$

$$y = 40 - 3z$$

z paràmetre

El sistema és indeterminat i, per tant, no es pot determinar la quantitat exacta de monedes que hi ha de cada tipus.

b)

[1,25 punts]

El valor total de les monedes de la caixa és $0{,}5x + y + 2z$. Si substituïm pels valors que hem trobat a l'apartat anterior tenim $0{,}5 \cdot 2z + (40 - 3z) + 2z = 40$ euros.

Criteris de correcció:
a) Obtenció del sistema: 0,5 p. Resolució i justificació de que és un sistema indeterminat: 0,75 p.
b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor total: 0,75 p.

3. Calculeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que verifica $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, sabent que

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

[2,5 punts]

Solució:

[2,5 punts]

Considerem la igualtat

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Fent el primer producte de matrius tenim

$$\begin{pmatrix}a & b\\ a & b+c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Si ara realitzem el segon producte obtenim

$$\begin{pmatrix}a-b & 2a-3b\\ a-b-c & 2a-3b-3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre, per tant, el sistema

$$\begin{cases}a-b=-1\\ 2a-3b=-2\\ a-b-c=-3\\ 2a-3b-3c=-8\end{cases}$$

Si el resolem per el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1 & -3\\ 2 & -3 & -3 & -8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Obtenim per tant la solució $c=2$, $b=0$ i $a=-1$. Per tant, la matriu que buscàvem és

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: Plantejament del producte de matrius: 0,5 punts. Càlcul dels dos productes de matrius. 0,5 punts cadascun. Plantejament del sistema d'equacions: 0,5 punts. Resolució del sistema d'equacions: 0,5 punts.