2. Experimentalment s'ha comprovat que la producció d'un tipus de fruita determinat que es cultiva en hivernacles depèn de la temperatura, segons la funció $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, en què x representa la temperatura de l'hivernacle en graus Celsius i $f(x)$ és la producció anual en centenars de quilograms per hectàrea. El preu de venda de la fruita es manté estable a 1,2 euros per cada quilogram.

a) Determineu l'interval de temperatures entre les quals cal mantenir l'hivernacle perquè hi hagi producció de fruita. Calculeu els ingressos anuals per hectàrea si es manté l'hivernacle a 20 °C de temperatura.
[1,25 punts]

b) A quina temperatura s'obté la producció màxima de fruita? Quins ingressos per hectàrea s'obtenen en aquest cas?
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

La funció f té com a gràfica una paràbola que pren el valor màxim al vèrtex, ja que el coeficient de x^2 és negatiu. Per trobar l'interval de temperatures entre les quals es produeix fruita només cal trobar els zeros de l'equació:

$$-x^2 + 46x - 360 = 0$$

La fórmula de l'equació de segon grau ens dona com a solucions $x = 10$ i $x = 36$, és a dir, que el rang de temperatures entre les quals es produeix fruita és $(10, 36)$.

Si es mantingués l'hivernacle a 20 graus, s'obtindrien anualment $f(20) = 160$ centenars de quilograms per hectàrea i any. Per tant, els ingressos per hectàrea serien de 16.000 · 1,2 = 19.200 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar la producció màxima, ens cal trobar el màxim de la funció anterior. Podem fer-ho calculant el vèrtex, o bé amb la funció derivada $f'(x) = -2x + 46$. Els candidats a extrems de la funció es produeixen quan $f'(x) = 0$, per tant, quan $x = 23$. En aquest cas verifiquem fàcilment que $f'(x) > 0$ quan $x < 23$ i que $f'(x) < 0$ quan $x > 23$ i, per tant, en el punt $(23, f(23)) = (23, 169)$ la funció assoleix un màxim. Així doncs, la temperatura que maximitza la producció són 23 graus centígrads, i en aquest cas es produeixen 16.900 quilograms per hectàrea. Els ingressos per hectàrea són de 16.900 · 1,2 = 20.280 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció del rang de temperatures: 0,75 p. Obtenció de la producció a 20 graus: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de la producció a aquesta temperatura: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p.

4. Un grup de biòlegs està estudiant un cultiu de bacteris. La població d'aquests bacteris (en centenars) és donada per la funció $P(t) = a + \dfrac{12t}{t^2 + b}$, en què a i b són constants positives reals i $t \geq 0$ és el temps transcorregut en minuts.

Sabem que a l'instant inicial de l'estudi la població de bacteris era de 6 centenars i que el valor màxim de població s'ha assolit al cap de 2 minuts d'haver iniciat l'estudi.

a) Trobeu els valors de les constants a i b.
[1,25 punts]

b) Calculeu la població màxima de bacteris i estudieu-ne el comportament a llarg termini, és a dir, cap a quin valor s'estabilitza el nombre de bacteris.
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

A l'instant inicial la població és de 6 centenars, per tant, $P(0) = 6$:

$$a + \frac{12 \cdot 0}{0^2 + b} = 6$$

Per tant, obtenim que $a = 6$.

D'altra banda, sabem que el màxim de la població s'assoleix a l'instant $t = 2$, per tant, $P'(2) = 0$. Calculem la derivada:

$$P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + b) - 12t \cdot 2t}{(t^2 + b)^2} = \frac{-12t^2 + 12b}{(t^2 + b)^2}$$

Imposem que $P'(2) = 0$:

$$\frac{-12 \cdot 2^2 + 12b}{(2^2 + b)^2} = 0$$

D'aquí obtenim que $-48 + 12b = 0$ i, per tant, $b = 4$.

Així, per tal que es compleixin les condicions del problema cal que $a = 6$ i $b = 4$.

D'altra banda, observem que amb aquests valors dels paràmetres efectivament en $t = 2$ hi ha un màxim perquè la derivada és positiva en l'interval $[0,2)$ i negativa per a $t > 2$.

b)

[1,25 punts]

La població obté el seu màxim a l'instant $t = 2$:

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$$

Per tant, la població màxima és de 9 centenars de bacteris.

Calculem ara el límit per obtenir la població a llarg termini:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \ 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + 0 = 6$$

Criteris de correcció: a) Obtenció del valor de a: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0, 5 p. Obtenció del valor de b: 0,25 p. b) Obtenció de la població màxima: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,75 p.

1. El valor d'un producte electrònic, en funció del nombre de mesos que fa que està a la venda, t, és donat per la funció $f(t) = -(t + 25)(t - 75)$.

a) Trobeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(t)$. En quin moment el producte assolirà el valor màxim? Quin és aquest valor màxim?
[1,25 punts]

b) Sabem que el producte es deixarà de comercialitzar quan arribi a un valor de 475 €. En quin moment es deixarà de comercialitzar?
[1,25 punts]

Solució:

a)

[1,25 punts]

Si realitzem el producte de la funció obtenim que $f(t) = -t^2 + 50t + 1875$. Calculem la primera derivada $f'(t) = -2t + 50$. Si igualem la primera derivada a 0 obtenim que hi ha un possible extrem relatiu en $t = 25$. Observem que la derivada $f'(t)$ és positiva per valors de t inferiors a $t = 25$ i és negativa per valors de t més grans. Per tant $f(t)$ creix a l'interval $(-\infty, 25)$ i decreix a l'interval $(25, +\infty)$. Això vol dir que en $t = 25$ té un màxim relatiu i el seu valor és $f(25) = 2.500$. Al cap de 25 mesos assoleix el seu valor màxim i aquest valor és de 2.500 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar l'instant t en el que el producte val 475 euros hem de resoldre l'equació $f(t) = 475$. Obtenim $-t^2 + 50t + 1.875 = 475$, és a dir,
$-t^2 + 50t + 1.400 = 0$.

Si resolem aquesta equació de segon grau obtenim $t = -20$, que no té sentit en el nostre context i $t = 70$. Per tant es deixarà de comercialitzar al cap de 70 mesos.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció dels intervals: 0,25 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25p. Valor del producte en el màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Resolució: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleixen els 475 euros: 0,25 p.

5. Una fàbrica de vehicles produeix cotxes d'un model anomenat *Paradís* i els ven a 58.000 €. Sabem que els costos mensuals de producció són donats per la funció $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704$ (en milers d'euros), en què x denota el nombre de cotxes que es fabriquen mensualment.

a) Suposant que es venen tots els cotxes que es fabriquen, verifiqueu que la funció de beneficis és $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704$ (en milers d'euros).
[0,75 punts]

b) Determineu el nombre de cotxes que cal fabricar mensualment per a no tenir pèrdues. Per a quin nombre d'unitats produïdes s'obté el benefici màxim i quin és aquest benefici màxim?
[1 punt]

c) Es vol augmentar el preu de venda per unitat, de manera que el benefici màxim s'obtingui amb 130 unitats (la funció que dona el cost mensual en milers d'euros no varia). Quin ha de ser el nou preu de venda del cotxe?
[0,75 punts]

Solució:

a)

[0,75 punts]

Els ingressos venen donats per la funció $I(x) = 58\,x$ (en milers d'euros). Per tant la funció que dona els beneficis mensuals en funció de les unitats produïdes serà:

$B(x) = I(x) - C(x) = 58\,x - (\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\frac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704.$

b)

[1 punt]

Resolent l'equació $-\frac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704 \quad = 0$ determinem que la funció $B(x)$ és positiva, i per tant l'empresa no tindrà pèrdues, quan el nombre d'unitats produïdes estigui dins l'interval $[48,196]$.

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0,\infty)$. Derivant obtenim $B'(x) = -x + 122,$ i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 122.$ Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0,122)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 122$. En el punt on s'assoleix el màxim el benefici obtingut és de $B(122) = 2.738$ milers d'euros.

c)

[0,75 punts]

Denotem per a el nou preu de venta en milers d'euros. La nova funció de beneficis serà

$F(x) = I(x) - C(x) = a\,x - (\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\frac{1}{2}x^2 + (64 + a)\,x - 4.704.$

Observem que és una paràbola i que el màxim s'assolirà en el seu vèrtex. Aplicant la fórmula del vèrtex de la paràbola obtenim l'equació

$$\frac{-(64+a)}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 130$$

És a dir, $64 + a = 130$ i per tant cal que $a = 66$. El nou preu de venda haurà de ser per tant de 66.000 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de beneficis: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval per no tenir pèrdues: 0,25p. Obtenció del valor pel qual s'obté el benefici màxim: 0,25p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p. c) Plantejament: 0,25 p. Obtenció del nou preu de venda: 0,75 p.