**5.** El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t) = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right)$, en què $t$ és el temps en dies i va des del dia $t = 1$ (dilluns) fins al dia $t = 8$ (dilluns de la setmana següent).

***a***) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
[1 punt]

***b***) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
[1,5 punts]

## Solució:

**5.**

a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3\cdot 1^2}{2} - \frac{9\cdot 1}{2} + 10\right) = \frac{550}{8} = \frac{275}{4} = 68{,}75 \text{ kg}$$

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3\cdot 8^2}{2} - \frac{9\cdot 8}{2} + 10\right) = 60 \text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) = 100 \quad \rightarrow \quad -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 = 10$$

$$\rightarrow \; -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \;\rightarrow\; -t^3 + 12\,t^2 - 36\,t = 0$$

$$\rightarrow \; -t(t^2 - 12\,t + 36) = 0 \;\rightarrow\; -t\,(t-6)^2 = 0 \;\rightarrow\; t = 0 \text{ i } t = 6$$

Com que $t = 0$ no és del domini d'aquesta funció, la solució és $t = 6$, és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

b) Per buscar els extrems relatius de $f(t)$, cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t) = 10\left(-\frac{3t^2}{8} + 3\text{t} - \frac{9}{2}\right) = 0 \;\rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \;\rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \;\rightarrow$$

$$(t-6)\cdot(t-2) = 0 \;\rightarrow t = 6 \text{ i } t = 2$$

Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

| | 1 | (1, 2) | 2 | (2, 6) | 6 | (6, 8) | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(t)$ | 68,75 kg | Decreix. | Mínim (2, 60) | Creix. | Màxim (6, 100) | Decreix. | 60 kg |

$$f(2) = 10\left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3\cdot 2^2}{2} - \frac{9\cdot 2}{2} + 10\right) = 60\; kg.$$

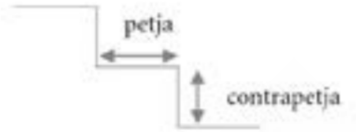
Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.

Criteris de correcció:

a) 0,25 punts per cada imatge i 0,5 punts per l'antiimatge.

b) 0,5 punts per la derivada; 0,25 punts pel càlcul dels extrems relatius; 0,5 punts per estudiar de quin tipus són els extrems relatius i 0,25 punts per observar que en $t = 8$ també s'assoleix el mínim.

**6.** Quan es dissenyen els esglaons d'una escala hi ha diversos paràmetres que cal tenir en compte, dos dels quals són la *petja* (la part horitzontal de l'esglaó, on es posa el peu) i la *contrapetja* (la part vertical del graó, és a dir, l'alçària).




L'arquitecte francès François Blondel va establir a finals del segle XVII que la relació ideal entre aquestes dues magnituds era que la suma de dues contrapetges més una petja fos igual a 64 cm.

Anomenem $y$ la longitud de la contrapetja i $x$ la longitud de la petja.

***a*)** Trobeu la funció que permet calcular la longitud ideal de la contrapetja en funció de la longitud de la petja. Quina seria la longitud ideal de la contrapetja si la petja és de 28 cm?
[1 punt]

***b*)** La normativa actual estableix que en el disseny d'escales d'ús públic cal que la petja sigui com a mínim de 28 cm i que la contrapetja estigui compresa entre 13 i 18,5 cm. A més a més, la suma de dues contrapetges més una petja ha d'estar entre 54 i 70 cm. Escriviu aquestes tres condicions en funció de $x$ i de $y$. Si volem construir una escala amb esglaons de 40 cm de petja, calculeu entre quins valors ha d'estar compresa la contrapetja per a complir amb la normativa actual.
[1,5 punts]

## Solució:

**6.**

a) Sabem que $2y + x = 64$. Per tant, aïllant, obtenim que: $y = \frac{64-x}{2}$

D'altra banda, si $x = 28$, substituint obtenim que: $y = \frac{64-28}{2} = 18 \text{ cm}$

Per tant, la longitud ideal de la contrapetja és de 18 cm.

b) Les inequacions que estableix la normativa són les següents:

$$\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18{,}5 \\ 54 \leq 2y + x \leq 70 \end{cases}$$

Així doncs, si $x = 40$, es compleix la primera condició. Pel que fa a la tercera, d'una banda tenim que $2y + 40 \leq 70$, que ens dona que $y \leq 15$. D'altra banda, cal que $2y + 40 \geq 54$, que ens dona que $y \geq 7$.

També sabem que cal que $13 \leq y \leq 18{,}5$. Per tant, ajuntant totes les condicions, sabem que cal que la contrapetja estigui entre 13 i 15 cm.

Criteris de correcció:

a) Escriure la condició en forma d'equació: 0,25 punts. Obtenir *y* en funció de $x$: 0, 5 punts. Trobar la longitud de la contrapetja: 0,25 punts.

b) Obtenció de les inequacions: 0,25 punts cadascuna. Treballar bé les desigualtats en el cas concret que $x = 40$: 0, 5 punts. Resultat final: 0,25 punts.

**1.** En els últims mesos, la demanda de gel hidroalcohòlic ha baixat molt respecte als primers moments de la pandèmia. La funció $f(x)=\dfrac{12+8x}{4x+1}$, en què $x\in[0,+\infty)$ indica el nombre de mesos transcorreguts des de l'inici de la pandèmia, dona les vendes mensuals, en milions de litres, de gel hidroalcohòlic.

***a*)** Determineu si la funció $f(x)$ és contínua en tot el seu domini. Calculeu la taxa de variació mitjana a l'interval $[0, 1]$. A quin valor tendiran les vendes mensuals de gel al llarg del temps?
[1,25 punts]

***b*)** Comproveu que la funció és decreixent en tot el domini i trobeu la recta tangent en el punt $x=1$.
[1,25 punts]

# Solució:

## 1.

a) La funció $f$ és racional i per tant és contínua en tots els reals llevat dels punts on s'anul·la el denominador, en aquest cas $x = -\frac{1}{4}$. Com que aquest punt no pertany al domini de la funció podem afirmar que la funció $f$ és contínua en tot el seu domini.
Per calcular la taxa de variació mitjana fem servir la fórmula
$TVM_f[0,1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-12}{1} = -8$
Finalment per respondre la darrera pregunta cal calcular
$$\lim_{x\to\infty} \frac{12+8x}{4x+1} = \frac{8}{4} = 2$$
Això ens indica que a mida que passin els mesos les vendes mensuals tendiran cap a 2 milions de litres.

b) Per comprovar que és decreixent en tot el seu domini hem de calcular la funció derivada. Sabem que la funció és derivable en tot el seu domini perquè és una funció racional contínua en tot el seu domini.
$$f'(x) = \frac{8(4x+1) - 4(12+8x)}{(4x+1)^2} = \frac{-40}{(4x+1)^2}$$
Com que el denominador és positiu per a qualsevol valor $x$ del domini i el numerador és negatiu, la derivada serà negativa en tot el domini de la funció $f$ i, per tant, aquesta funció és decreixent en tot el seu domini.
Calculem ara l'equació de la recta tangent en $x = 1$. Hem d'aplicar la fórmula
$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$
és a dir,
$$y - 4 = -\frac{8}{5}(x-1)$$
i, per tant, la recta tangent és
$$y = -\frac{8}{5}x + \frac{28}{5}$$

### Criteris de correcció:

a) Argumentació de que la funció és contínua en tot el seu domini: 0,25 p. Càlcul de la TVM: 0,5p. Càlcul del límit: 0,5 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5p. Justificació de que la funció és decreixent en tot el seu domini: 0,25 p. Càlcul de la recta tangent: 0,5p.

**4.** El cost anual de la neteja de les instal·lacions d'una empresa que va obrir fa 20 anys, expressat en centenars d'euros, és donat per la funció

$$C(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \dfrac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

en què $t$ és el temps expressat en anys.

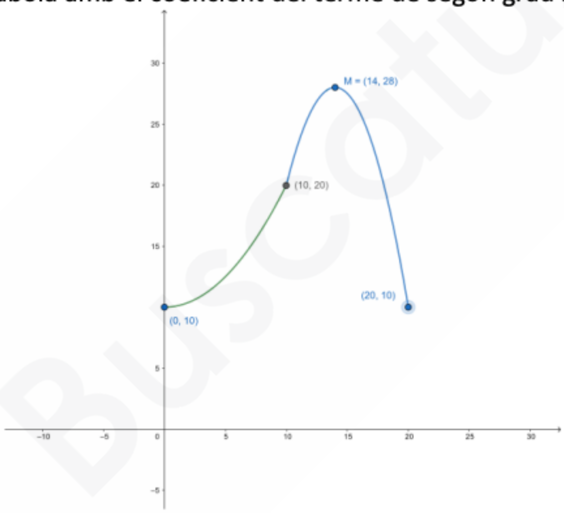
***a*)** Quin va ser el cost de la neteja de l'empresa en el moment d'obrir? I al cap de 10 anys de funcionament? Comproveu que en aquest punt la funció és contínua. Quin és el cost de la neteja de l'empresa al cap de 20 anys de funcionament?
[1,25 punts]

***b*)** Representeu gràficament la funció $C(t)$. En quin moment el cost de la neteja de l'empresa va ser màxim?
[1,25 punts]

## Solució:

a) En el moment d'obrir l'empresa $C(0) = 10$, per tant el cost de la neteja de l'empresa en el moment d'obrir era de 10 centenars d'euros, és a dir, 1000 euros.
Quan $t = 10$ observem que la funció és contínua i que tant per l'esquerra com per la dreta obtenim que el cost de la neteja de les instal·lacions als 10 anys és de 20 centenars d'euros, és a dir, de 2000 euros:
$C(10) = \frac{10^2}{10} + 10 = 20.$
Mentre que el límit quan $t$ tendeix a 10 per la dreta és
$28 - \frac{(10-14)^2}{2} = 20.$
Pel que fa als 20 anys obtenim
$C(20) = 28 - \frac{(20-14)^2}{2} = 10$
i, per tant, el cost de la neteja de l'empresa als 20 anys de funcionament fou de 10 centenars d'euros, és a dir, 1000 euros.

b) Observem que es tracta d'una funció definida a trossos. En l'interval [0,10] es tracta d'una paràbola creixent en l'interval [0,10] atès que el coeficient del terme de segon grau és positiu i que té el mínim en el punt d'abscissa 0.
En l'interval [10,20] la funció assoleix el màxim en el seu vèrtex, $M = (14,28)$, atès que és una paràbola amb el coeficient del terme de segon grau negatiu.



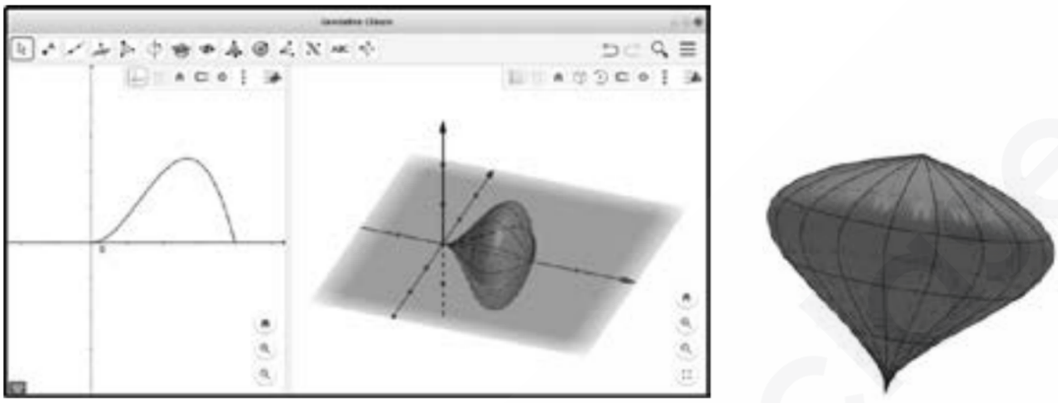

Per saber en quin moment el cost de la neteja de l'empresa va ser màxim podem utilitzar la gràfic de la funció. Veiem que el cost de la neteja va ser màxim en el catorzè any i aquest cost màxim va ser de 28 centenars d'euros, és a dir, 2800 euros.

### Criteris de correcció:

a) Càlcul de C(0): 0,25 p., de C(10) i comprovar que és contínua en aquest punt: 0,5 p. i de C(20): 0,25 p. Expressar correctament el cost (en euros o en centenars d'euros): 0,25 p.

b) Obtenció de la gràfica: 0,75 p. Càlcul del màxim: 0,5 p.

**6.** Una jove emprenedora vol crear una empresa de baldufes, que té pensat d'imprimir amb una impressora 3D a partir d'un disseny matemàtic fet amb el programa GeoGebra. Per a fer-ho, fa girar el perfil de la funció $f(x) = -x^3 + 2x^2$ al voltant de l'eix de les abscisses entre els dos punts de tall amb aquest eix, i així obté una baldufa tombada. Les unitats estan expressades en centímetres.



***a*)** Quina serà l'alçària de la baldufa? Observeu que per a obtenir-la heu de calcular la distància entre els dos punts de tall amb l'eix de les abscisses.
[1 punt]

***b*)** Quina serà l'amplària de la baldufa? Observeu que l'amplària correspon al doble del valor que pren la funció en el màxim que hi ha entre els dos punts de tall amb l'eix de les abscisses.
[1,5 punts]

## Solució:

**6.**

a) Tenint en compte que la baldufa es dissenya tombada, per calcular l'alçària sols cal trobar la distància entre els dos punts de tall a l'eix d'abscisses. Per tant, hem de resoldre l'equació:

$$-x^3 + 2x^2 = 0$$

Traient factor comú veiem què $x^2(-x+2) = 0$ i veiem que $x = 0$ és una arrel doble i $x = 2$ una simple, amb la qual cosa podem constatar que està imprimint una petita baldufa de 2 cm d'alçària.

b) Per calcular l'amplària hem de trobar els extrems relatius. Comencem calculant la derivada

$$f'(x) = -3x^2 + 4x$$

La igualem a zero i traient factor comú. Tenim que

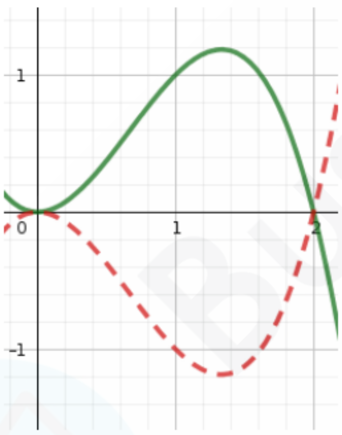
$$x(-3x+4) = 0$$

I, per tant, obtenim les arrels $x = 0$, que correspon a l'arrel doble de la funció, i $x = \frac{4}{3}$ que correspon a un extrem relatiu, l'ordenada d'aquest extrem serà

$$f(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$$

I, per tant l'amplària de la baldufa és de

$$2 \cdot \frac{32}{27} = \frac{64}{27} \simeq 2{,}37\ cm$$




Criteris de correcció:

a) Càlcul dels punts de tall: 0,5 p. Càlcul de l'alçària: 0,5 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5p. Càlcul de l'ordenada del punt on s'obté el màxim: 0,5 p. Càlcul de l'amplària: 0,5 p.