2. Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.

a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.
[1,25 punts]

b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?
[1,25 punts]

Solució:

2.

a) Cal fer el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}10 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Per tant, per al curs vinent cal reservar 15 places de nivell principiant, 59 de nivell intermedi i 71 de nivell avançat.

b) Cal resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Es pot fer per diversos mètodes, per exemple pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}5 & 0{,}4 & 49 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 490 \\ 3 & 6 & 510 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 15 & 30 & 2\,550 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 0 & 18 & 1\,080 \end{array}\right)$$

I, per tant, $18y = 1\,080$, és a dir, $y = 60$ i $15x + 12 \cdot 60 = 1\,470$, d'on s'obté que $15x = 750$, és a dir, $x = 50$. Així doncs, actualment hi ha 50 alumnes matriculats en l'horari de matí i 60 en l'horari de tarda.

Criteris de correcció:

a) Plantejament: 0,5 punts. Producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del resultat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

3. En Robert ha fet tres proves d'una assignatura. Fent la mitjana aritmètica de les notes obtingudes en cadascuna de les tres proves li ha quedat una nota global de 6. En Robert sap que la nota de la tercera prova ha estat igual que la mitjana aritmètica de les notes de les altres dues proves.

***a*)** Amb aquesta informació, pot saber alguna de les tres notes? En cas afirmatiu, de quina prova i quina seria la nota obtinguda?
[1,25 punts]

***b*)** La professora li diu que ha estat molt irregular i que si només es tinguessin en compte les notes de les dues darreres proves hauria obtingut una mitjana de 7. Quina nota ha obtingut en cada prova?
[1,25 punts]

Solució:

3.

a) Si anomenem respectivament *x*, *y* i *z* els resultats de cadascuna de les tres proves, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions, i aplicant el mètode de Gauss obtenim:

$$\begin{cases} x+y+z = 18 \\ -x-y+2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z = 18 \\ 3z = 18 \end{cases}$$

Obtenim, per tant, el valor de $z = 6$. Així doncs, la nota de la tercera prova ha estat un 6.

b) Afegint la nova informació, el sistema queda:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} = 7 \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions i aplicant el mètode de Gauss, ens queda:

$$\begin{cases} x+y+z = 18 \\ -x-y+2z = 0 \\ y+z = 14 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z = 18 \\ 3z = 18 \\ y+z = 14 \end{cases}$$

Com que tenim un sistema esglaonat, podem resoldre'l fàcilment i obtenim $z = 6, y = 8$ i $x = 4$.
Així doncs, ha obtingut un 4 a la primera prova, un 8 a la segona i un 6 a la tercera.

Criteris de correcció:

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada una de les dues equacions. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar el valor correcte de z: 0,25 punts.

b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar els valors correctes de x i y: 0,5 punts.

3. Una empresa distribueix dos tipus de paquets a les farmàcies (A i B). El paquet de tipus A conté els productes següents: 5 termòmetres digitals per infrarojos, 30 mascaretes i 10 tests ràpids d'antígens. El paquet de tipus B conté 1 termòmetre digital per infrarojos, 15 mascaretes i 20 tests ràpids d'antígens.

El preu del paquet de tipus A és de 550 € i el del paquet de tipus B és de 200 €. El preu de cada producte és el mateix en els dos tipus de paquets.

***a*)** Amb les dades de l'enunciat, és possible trobar el preu d'un termòmetre, el d'una mascareta i el d'un test d'antígens? Justifiqueu la resposta plantejant i classificant un sistema d'equacions. Resoleu el sistema deixant la solució en funció del preu del test d'antígens.
[1,75 punts]

***b*)** Si un test d'antígens costa 4 €, quin serà el preu d'una mascareta? I el d'un termòmetre?
[0,75 punts]

Solució:

3.

a) Denotem per x el preu d'un termòmetre, per y el preu d'una mascareta i per z el preu d'un test d'antígens. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 5x + 30y + 10z = 550 \\ x + 15y + 20z = 200 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 30 & 10 & 550 \\ 1 & 15 & 20 & 200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 110 \\ 1 & 15 & 20 & 200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 110 \\ 0 & 9 & 18 & 90 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Observem que hi ha dues files amb algun element diferent de zero, per tant el rang de la matriu del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada també és 2.
Com que el rang de la matriu és 2, el de l'ampliada també és 2 i hi ha 3 incògnites, el sistema és compatible indeterminat, és a dir, té infinites solucions. Per tant, no és possible donar un únic valor al preu del termòmetre, de la mascareta i del test.
Hem arribat a les equacions:

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 110 \\ \quad y + 2z = 10 \end{cases}$$

Si aïllem y de la segona equació obtenim: $y = 10 - 2z$
I substituint a la primera equació

$$x + 6(10 - 2z) + 2z = 110$$

És a dir,

$$x = 50 + 10z$$

Per tant les infinites solucions es poden expressar, en funció del preu del test d'antígens z, com

$$\begin{cases} x = 50 + 10z \\ y = 10 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

b) Si el preu del test d'antígens és de 4 €, tenim:

$$x = 50 + 10 \cdot 4 = 90$$
$$y = 10 - 2 \cdot 4 = 2$$

És a dir, el termòmetre té un preu de 90 € i la mascareta val 2 €.

Criteris de correcció:

a) Plantejament: 0,25 p. cada equació. Classificació del sistema: 0,25p. Resolució del sistema en funció de z: 1p.

b) Càlcul del preu de la mascareta i del termòmetre: 0,75 p.

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en què a i b són dos paràmetres reals.

***a*)** Trobeu els valors dels paràmetres a i b per als quals es compleix que $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.
[1,25 punts]

***b*)** Si $a=1$ i $b=1$, resoleu l'equació matricial $2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$.
[1,25 punts]

Solució:

5.

a) Comencem calculant A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix}.$$

Finalment, aplicant que $A^2 - 2A = B$ tenim que

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, s'ha de satisfer que

$$\left.\begin{matrix} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{matrix}\right\}$$

La primera equació ens dona $a(a-2) = 0$ i, per tant, tenim dues possibles solucions, o bé $a = 0$ o bé $a = 2$.

Si $a = 0$, la segona equació ens queda

$$-2b = 1 \rightarrow b = \frac{-1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mentre que si $a = 2$, tenim

$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Ara tenim que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comencem aïllant X en l'equació

$$2A = AX + B \rightarrow AX = 2A - B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2A - B)$$
$$\rightarrow X = 2I - A^{-1}B$$

en què I denota la matriu identitat d'ordre 2.

Calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. I finalment,

$$X = 2I - A^{-1}B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul de A^2: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,5 p. Obtenció dels valors de a i b: 0,25 p. cada parell.

b) Aïllar la matriu X: 0,5 p. Càlcul de la inversa de A: 0,5 p. Resultat final: 0,25 p.