1. El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500 €. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5 € de descompte en el preu del bitllet aconsegueix dos passatgers més.

a) Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escriviu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x.
[1 punt]

b) A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtindran amb aquest preu?
[1,5 punts]

Solució:

1.

a) Sigui x, el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 5 €. La funció que dona els ingressos per la venda de bitllets és el producte entre el preu del bitllet i el nombre de bitllets venuts:

$$I(x) = (500 - 5x) \cdot (180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90\,000$$

b) Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:
$I'(x) = -20x + 100.$
Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 5$ i és negativa per a $x > 5$.
Per tant, el preu del bitllet per maximitzar els ingressos ha de ser de $500 - 5 \cdot 5 = 475$ €. I, amb aquest preu, els ingressos de la companyia per la venda de bitllets seran de $I(x) = 475 \cdot 190 = 90\,250$ €.

Criteris de correcció:

a) Obtenció de la funció que dona el preu del bitllet en funció de x: 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona el nombre de passatgers en funció de x: 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu del bitllet: 0,25 punts. Obtenció dels ingressos màxims: 0,25 punts.

5. El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t)=10\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10\right)$, en què t és el temps en dies i va des del dia $t=1$ (dilluns) fins al dia $t=8$ (dilluns de la setmana següent).

a) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
[1 punt]

b) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
[1,5 punts]

Solució:

5.

a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3\cdot 1^2}{2} - \frac{9\cdot 1}{2} + 10\right) = \frac{550}{8} = \frac{275}{4} = 68{,}75 \text{ kg}$$

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3\cdot 8^2}{2} - \frac{9\cdot 8}{2} + 10\right) = 60 \text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) = 100 \rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 = 10$$

$$\rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \rightarrow -t^3 + 12\,t^2 - 36\,t = 0$$

$$\rightarrow -t(t^2 - 12\,t + 36) = 0 \rightarrow -t\,(t-6)^2 = 0 \rightarrow t = 0 \text{ i } t = 6$$

Com que $t = 0$ no és del domini d'aquesta funció, la solució és $t = 6$, és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

b) Per buscar els extrems relatius de $f(t)$, cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t) = 10\left(-\frac{3t^2}{8} + 3t - \frac{9}{2}\right) = 0 \rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow$$

$$(t-6)\cdot(t-2) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ i } t = 2$$

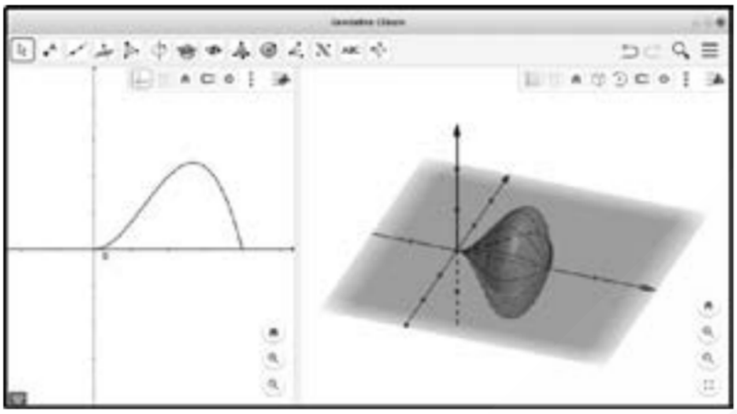
Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

	1	(1, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)	8
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	68,75 kg	Decreix.	Mínim (2, 60)	Creix.	Màxim (6, 100)	Decreix.	60 kg

$$f(2) = 10\left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3\cdot 2^2}{2} - \frac{9\cdot 2}{2} + 10\right) = 60\,kg.$$

Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.

6. Una jove emprenedora vol crear una empresa de baldufes, que té pensat d'imprimir amb una impressora 3D a partir d'un disseny matemàtic fet amb el programa GeoGebra. Per a fer-ho, fa girar el perfil de la funció $f(x) = -x^3 + 2x^2$ al voltant de l'eix de les abscisses entre els dos punts de tall amb aquest eix, i així obté una baldufa tombada. Les unitats estan expressades en centímetres.



a) Quina serà l'alçària de la baldufa? Observeu que per a obtenir-la heu de calcular la distància entre els dos punts de tall amb l'eix de les abscisses.
[1 punt]

b) Quina serà l'amplària de la baldufa? Observeu que l'amplària correspon al doble del valor que pren la funció en el màxim que hi ha entre els dos punts de tall amb l'eix de les abscisses.
[1,5 punts]

Solució:

6.

a) Tenint en compte que la baldufa es dissenya tombada, per calcular l'alçària sols cal trobar la distància entre els dos punts de tall a l'eix d'abscisses. Per tant, hem de resoldre l'equació:

$$-x^3 + 2x^2 = 0$$

Traient factor comú veiem què $x^2(-x+2) = 0$ i veiem que $x = 0$ és una arrel doble i $x = 2$ una simple, amb la qual cosa podem constatar que està imprimint una petita baldufa de 2 cm d'alçària.

b) Per calcular l'amplària hem de trobar els extrems relatius. Comencem calculant la derivada

$$f'(x) = -3x^2 + 4x$$

La igualem a zero i traient factor comú. Tenim que

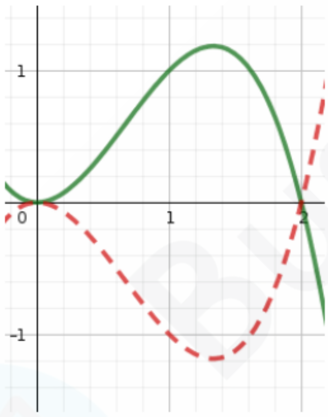
$$x(-3x+4) = 0$$

I, per tant, obtenim les arrels $x = 0$, que correspon a l'arrel doble de la funció, i $x = \frac{4}{3}$ que correspon a un extrem relatiu, l'ordenada d'aquest extrem serà

$$f(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$$

I, per tant l'amplària de la baldufa és de

$$2 \cdot \frac{32}{27} = \frac{64}{27} \simeq 2{,}37\ cm$$



Criteris de correcció:

a) Càlcul dels punts de tall: 0,5 p. Càlcul de l'alçària: 0,5 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5p. Càlcul de l'ordenada del punt on s'obté el màxim: 0,5 p. Càlcul de l'amplària: 0,5 p.