

3. El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) té previst muntar una exposició. S'estima que el nombre de visitants setmanals que rebrà l'exposició, expressat en desenes

de persones, és donat per la funció  $f(x) = \frac{240x}{x^2 - 2x + 4}$ , en què  $x \geq 1$  representa el temps,

expressat en setmanes, que fa que l'exposició està oberta al públic.

- a) Quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana? Calculeu la taxa de variació mitjana del nombre de visitants entre la setmana 1 i la setmana 4.

[1 punt]

- b) Quina setmana es preveu que anirà més gent a veure l'exposició? Quants visitants s'estima que hi aniran aquella setmana?

[1,5 punts]

## Solució:

- a) Per saber quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana hem de calcular  $f(1) = \frac{240 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = 80$ . Per tant, la primera setmana es preveu que hi vagin  $80 \cdot 10 = 800$  persones (recordeu que la funció és expressada en desenes de persones).

La taxa de variació mitjana entre les setmanes 1 i 4 és donada per:

$$TVM_f[1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{80 - 80}{3} = 0.$$

Aquesta taxa ens dona zero, perquè tant a la primera setmana com a la quarta s'espera el mateix nombre de visitants.

- b) Busquem el màxim de la funció. Per fer-ho, calculem la derivada i la igualem a zero:

$$f'(x) = \frac{240 \cdot (x^2 - 2x + 4) - 240x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{-240x^2 + 960}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Quan igualem a zero la derivada veiem que s'anul·la en els punts  $x = 2$  i  $x = -2$ . Descartem la solució negativa, perquè no té sentit en el context del problema, i observem que en  $x = 2$  hi ha un màxim, ja que abans del punt  $x = 2$  la derivada és positiva i després del punt  $x = 2$  la derivada és negativa.

Per tant, el màxim de visitants setmanals s'assolirà durant la segona setmana.

Per saber el nombre de visitants durant la segona setmana, calculem la imatge de 2:

$$f(2) = \frac{240 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = 120$$

Per tant, durant la segona setmana el nombre de visitants previst és de  $120 \cdot 10 = 1.200$  persones.

**Criteris de correcció:** a) Càlcul del nombre de visitants de la primera setmana: 0,5 punts. Càlcul de la TVM: 0,5 punts. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre de visitants: 0,25 punts.

6. Un inversor s'adona que en el moment actual les seves accions tenen unes pèrdues de 2.000 €. El seu assessor financer té una previsió del valor de les accions per als propers 30 dies. Li diu que el valor de les accions ja ha començat a augmentar i que d'aquí a pocs dies deixarà de tenir pèrdues. Segons les previsions, durant els propers 10 dies el valor de les accions creixerà; del dia 10 al dia 20 els beneficis disminuiran, i a partir d'aquest dia els beneficis tornaran a créixer. L'assessor també diu a l'inversor que la previsió dels beneficis per als propers 30 dies té com a model la funció  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , en què  $x \in [0, 30]$ .
- a) Calculeu els valors dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ .  
[1,5 punts]
- b) Si l'inversor vol vendre les seves accions durant aquests 30 dies, quin és el dia en el qual obtindrà més beneficis de la venda? Quins beneficis obtindrà?  
[1 punt]

## Solució:

- a) Segons l'enunciat, la funció  $f(x)$  verifica que  $f(0) = -2.000$ ,  $f'(10) = 0$  i  $f'(20) = 0$ .

D'altra banda,  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ . Per tant, les equacions que s'han de verificar són:

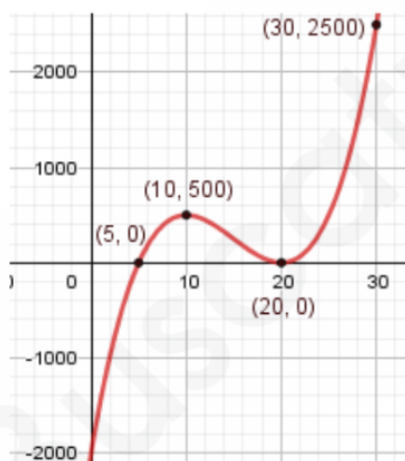
$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -2.000 \Rightarrow c = -2.000 \\ f'(10) = 0 \Rightarrow 300 + 20a + b = 0 \\ f'(20) = 0 \Rightarrow 1.200 + 40a + b = 0 \end{array} \right\}$$

Així, tenim que:

$$300 + 20a = 1.200 + 40a \Rightarrow -900 = 20a \Rightarrow a = -45$$

I, també, que:  $b = -300 - 20 \cdot (-45) = 600$ .

- b) A l'apartat anterior hem obtingut que la funció que preveu els beneficis que s'obtindran és  $f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2.000$ .



El millor dia per vendre les accions serà el valor on s'assoleix el màxim absolut d'aquesta funció definida en l'interval  $(0, 30)$ .

Aquest valor s'assolirà o bé quan  $x = 10$  (màxim relatiu) o bé en els extrems de l'interval de definició. Observem que:

$$f(10) = 500 \text{ €}$$

$$f(0) = -2.000 \text{ €}$$

$$f(30) = 2.500 \text{ €}$$

Per tant, el millor dia per vendre les accions serà el trentè dia i obtindrà uns beneficis de 2.500 euros.

**Críteris de correcció:** a) Càlcul dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ : 0,5 punts cadascun. b) Obtenció del màxim absolut de manera justificada: 0,75 punts. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 punts.