

2. En Martí explica a en Marcel que l'altre dia, quan va agafar l'autocar per anar de Barcelona a Tarragona, l'autocar es va espatllar just a la meitat del trajecte. Des d'aquest punt va anar caminant fins a la població més propera, de manera que va fer a peu una vintena part del total del trajecte. Allà va agafar un taxi fins a Tarragona, i diu que va fer 5 quilòmetres més en autocar que en taxi.

a) Plantegeu i resoleu un sistema d'equacions per a calcular quants quilòmetres va fer en Martí en autocar, a peu i en taxi.

[1,75 punts]

b) Si l'autocar anava a 100 km/h, en Martí va caminar a 5 km/h i el taxi anava a 90 km/h, quant temps va tardar a fer tot el trajecte?

[0,75 punts]

Solució:

- a) Anomenem x, y i z la quantitat de quilòmetres recorreguts en autocar, a peu i en taxi, respectivament.

L'enunciat planteja tres condicions que es tradueixen en les equacions següents:

$$\begin{cases} x = \frac{x+y+z}{2} \\ y = \frac{x+y+z}{20} \\ x = z + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 19y + z = 0 \\ x - z = 5 \end{cases}$$

- a) Resolent pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -19 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \end{array} \right)$$

Per tant, obtenim $z = 45$, $y = 5$ i $x = 50$. Així doncs, va fer 50 km en autocar, 5 km a peu i 45 km en taxi.

- b) Sabem que l'autocar circulava a 100 km/h, en Martí caminava a 5 km/h i el taxi anava a 90 km/h. Per tant, per saber el temps total que va trigar hem de calcular:

$$50 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 45 \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2 \text{ hores.}$$

En total, va trigar dues hores a completar el trajecte.

Críteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 punts cada equació. Resolució: 1 punt. b) Plantejament: 0,5 punts. Càlcul: 0,25 punts.

5. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quin valor de a les dues matrius commuten, és a dir, per a quin valor de a es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$. Comproveu que per a aquest valor de a se satisfà que $A \cdot B = 2 \cdot I$, en què I és la matriu identitat d'ordre dos.

[1,25 punts]

b) Per al valor de a trobat a l'apartat anterior, calculeu les matrius inverses de les matrius A i B . Podeu aplicar la relació $A \cdot B = 2 \cdot I$.

[1,25 punts]

Solució:

a) Comencem calculant els productes de les dues matrius:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Observem que, perquè les dues matrius siguin iguals, cal que $1 - a = 0$, és a dir, que $a = 1$.

Quan $a = 1$, observem que:

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

b) Sabem que es compleix la igualtat $A \cdot B = 2 \cdot I$. Si multipliquem per $\frac{1}{2}$ als dos costats de la igualtat, tenim que:

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot I = I$$

Així doncs, d'una banda, tenim que $\left(\frac{1}{2} \cdot A\right) \cdot B = I$, i per tant:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, tenim també que:

$$A \cdot \frac{1}{2} \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot B\right) = I$$

Així que:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul del valor de a : 0,75 punts. Comprovació de la igualtat: 0,5 punts. b) Si han calculat una de les dues matrius inverses: 0,75 punts; si les han calculat totes dues: 1,25 punts.