

4. El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, \quad t \geq 0$$

en què  $t$  representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció.

- a) Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants a la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà?

[1 punt]

- b) En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats per aquesta malaltia? Quin és aquest nombre?

[1,5 punts]

## Solució:

4.

- a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10 \text{ milers d'infectats i}$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15 \text{ milers d'infectats.}$$

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

- b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems  $t = -2$  (que no té sentit en el context del problema, ja que  $t \geq 0$ ) i  $t = 2$ .

Com que  $f'(1) > 0$ ,  $f'(3) < 0$  deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a  $t = 2$  i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de  $f(2) = 15$  milers de persones.

### Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.  
Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.

6. Una botiga ven un tipus determinat d'ampolla d'aigua a 70 cèntims. Aquesta setmana fa una oferta de  $4 \times 3$ , és a dir, que si comprem quatre ampolles d'aigua només en paguem tres. La botiga també ha anunciat que la propera setmana l'oferta de  $4 \times 3$  ja no serà vigent, però, en canvi, aplicarà un 20 % de descompte sobre el total de la compra que facin els clients.

a) Calculeu el preu que haurem de pagar per 4 ampolles d'aigua tant aquesta setmana com la propera. En lloc d'un 20 %, quin descompte caldria aplicar per a igualar l'oferta de  $4 \times 3$ ?

[1,5 punts]

b) Calculeu, en general, quin descompte caldria aplicar per a igualar una oferta de  $m \times (m - 1)$ ; és a dir, que consisteix a vendre  $m$  ampolles d'aigua pel preu de  $m - 1$  ampolles, en què  $m$  és un enter més gran que 1.

[1 punt]

## Solució:

6.

- a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$$0,70 \cdot 3 = 2,10 \text{ euros.}$$

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$$0,70 \cdot 4 = 2,80 \text{ euros}$$

I ara restem al resultat un 20%

$$2,80 \text{ euros} - 0,20 \cdot 2,80 \text{ euros} = 2,24 \text{ euros}$$

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara  $x$  el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2,80 \text{ euros} - 2,80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2,10 \text{ euros}$$

$$2,80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2,10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4×3.

- b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta  $m \times (m - 1)$  igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0,70 \cdot m - 0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0,70 \cdot (m - 1)$$

$$0,70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0,70 \cdot m - 0,70$$

$$-0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0,70$$

Aïllant la  $x$  obtenim  $x = \frac{100}{m}$  que és el percentatge que buscàvem.