

1. L'empresa d'esports aquàtics DiverAqua ofereix tres tipus d'activitats: esquí aquàtic, caiac i moto aquàtica. El preu per sessió i client de cadascuna d'aquestes activitats és de 40 € per l'esquí aquàtic, 20 € pel caiac i 60 € per la moto aquàtica. Sabem que avui DiverAqua ha venut 45 sessions en total. També sabem que el nombre de clients que han escollit esquí aquàtic és el triple dels que han escollit una sessió de caiac. La recaptació total del dia ha estat de 1.700 €.

a) Plantegeu un sistema d'equacions lineals que reculli tota aquesta informació.

[1 punt]

b) Quantes persones han dut a terme cadascuna de les tres activitats?

[1,5 punts]

Solució:

1.

- a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han practicat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 45 \\40x + 20y + 60z &= 1700 \\x &= 3y\end{aligned}$$

- b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases}x + y + z = 45 \\2x + y + 3z = 85 \\x - 3y = 0\end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\2 & 1 & 3 & 85 \\1 & -3 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\0 & 1 & -1 & 5 \\0 & 4 & 1 & 45\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\0 & 1 & -1 & 5 \\0 & 0 & 5 & 25\end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z = 25$, és a dir, $z = 5$, $y - 5 = 5$, per tant $y = 10$ i, finalment, $x + 10 + 5 = 45$, és a dir, $x = 30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Si anomenem I la matriu identitat d'ordre 2, trobeu el valor de a per al qual $A^2 = I$.

[1 punt]

b) Per $a = -1$, calculeu A^2 , A^3 i A^4 . Feu servir els càlculs anteriors per a deduir el valor de A^{-1} i de A^{23} .

[1,5 punts]

Solució:

5.

- a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igulem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1 + 2a = 1$ i per tant $a = 0$.

- b) Per $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.

D'altra banda,

$$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$$

Criteris de correcció:

- a) Càlcul A^2 : 0,5 punts. Trobar el valor de a : 0,5 punts.

- b) Càlcul de A^2, A^3 i A^4 : 0,5 punts en total. Deduir el valor de A^{-1} : 0,5 punts. Deduir el valor de A^{23} : 0,5 punts.