

2. Un fabricant de vehicles elèctrics ha tret al mercat un model nou amb tant d'èxit que ven tots els que fabrica. El preu de venda de cada cotxe és de 35.000 €. Fabricar un cert nombre de cotxes li suposa unes despeses de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en què x representa el nombre de vehicles fabricats.

a) Entre quins valors ha de mantenir la producció per tal de no tenir pèrdues?

[1,25 punts]

b) Quants vehicles ha de fabricar per tal d'obtenir el màxim benefici? Quin valor pren aquest benefici màxim?

[1,25 punts]

Solució:

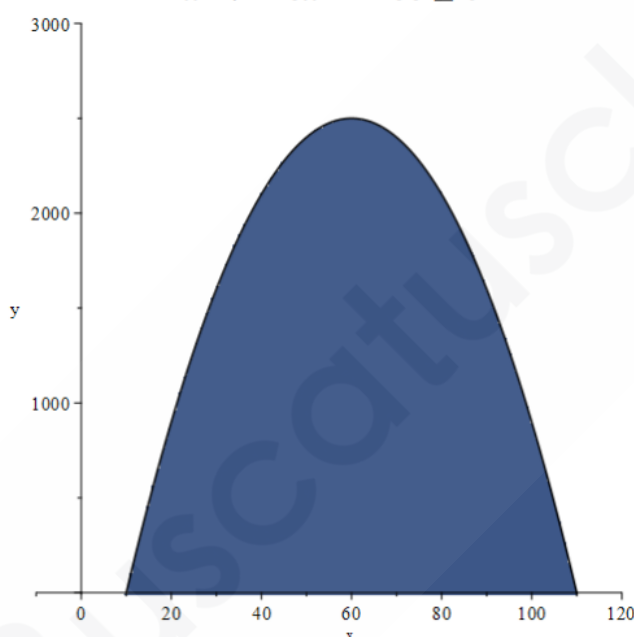
2.

- a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10, 110]$. Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

- b) Per a obtenir el màxim igualem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + 120 \\ -2x + 120 &= 0 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

	$[0, 60)$	60	$(60, 110]$
$f'(x)$	Positiu	Zero	Negatiu
$f(x)$	Creixent	Màxim	Decreixent

4. El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, \quad t \geq 0$$

en què t representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció.

- a) Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants a la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà?

[1 punt]

- b) En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats per aquesta malaltia? Quin és aquest nombre?

[1,5 punts]

Solució:

4.

- a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10 \text{ milers d'infectats i}$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15 \text{ milers d'infectats.}$$

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

- b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.

Com que $f'(1) > 0$, $f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

Criteris de correcció:

- a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.
Càlcul del límit: 0,5 punts

- b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.