1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudieu la concavitat de la funció.
[0,75 punts]

c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a.
[1 punt]

Solució:

a)

Com que $f'(x) = 3x^2 - 12x$, integrant tenim que $f(x) = x^3 - 6x^2 + C$, on C és una constant real.

Ara bé, sabem que $f(x)$ talla l'eix d'abscises en $x = 1$, per tant, $f(1) = 0$. Substituïm:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0 \ \rightarrow C = 5$$

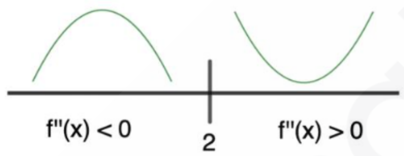
I obtenim $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$.

b)

En el punt d'inflexió s'anul·larà la derivada segona:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \ \rightarrow x = 2$$

Per estudiar la concavitat de $f(x)$, estudiarem el signe de la derivada segona:



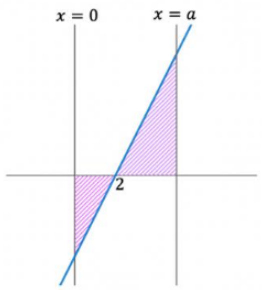
A l'esquerra del punt $x = 2$ la derivada segona és negativa i a la dreta del punt $x = 2$ la derivada segona és positiva.

Per tant:

- En el punt $(2, f(2))$ hi ha un punt d'inflexió.
- La funció té concavitat negativa o és còncava cap avall a l'interval $(-\infty, 2)$
- La funció té concavitat positiva o és còncava cap amunt a l'interval $(2, +\infty)$

c)

La funció $f''(x) = 6x - 12$ talla l'eix d'abscises en $x = 2$ i l'enunciat ens diu que $a > 2$, fets que s'hauran de tenir en compte en el càlcul de les integrals definides:



$$15 = \int_0^2 (12 - 6x)dx + \int_2^a (6x - 12)dx$$

$$15 = [12x - 3x^2]_0^2 + [3x^2 - 12x]_2^a$$

$$15 = 24 - 12 + 3a^2 - 12a - 12 + 24$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0 \ \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1 \ \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Com que $a > 2$, només hi ha una solució: $\boxed{a = 3}$.

Observació: el plantejament de l'àrea també es pot fer a partir de la suma de les àrees dels dos triangles de la figura i no fent esment de cap càlcul integral.

4. ***a***) Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt (0, 5), que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

b) Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval (0, 4). Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1,5 punts]

Solució:

a)

De la funció g tenim la informació següent: $g(0) = 5,\ g'(1) = 0, g''(x) = 2x + 1.$

Per tant, sabem que $g'(x) = x^2 + x + m$ on m és una constant real. Com que $g'(1) = 0$ deduïm que $m = -2$. Aleshores $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + n$ on n és una constant real. Com que $g(0) = 5$ deduïm que $n = 5$. Així tenim que

$$\boxed{g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5}$$

Observació: També és totalment correcte el plantejament inicial de

$g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i imposant les condicions obtenir els valors respectius de *a*, *b*, *c* i *d*.

b)

La funció f és polinòmica i, per tant, contínua i derivable a tots els nombres reals. Comprovem fàcilment que $\boxed{f(2) = 0}$ i per tant $x = 2$ és una arrel de la funció.

Per comprovar si és estrictament creixent a l'interval indicat calculem la funció derivada $f'(x) = -3x^2 + 12x$, que s'anul·la per a $x = 0$ i $x = 4$.

Com que es tracta d'una paràbola amb coeficient principal negatiu deduïm que la derivada és estrictament positiva en l'interval $(0,4)$ i, per tant, que la funció f és estrictament creixent en aquest interval. Això implica que la funció f no té més arrels en aquest interval i per tant l'àrea A demanada es pot calcular amb l'expressió següent:

$$\boxed{A =} \left| \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx \right| + \left| \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_0^2 \right| + \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_2^4 \right| = 20 + 20 = \boxed{40\ \text{u}^2}.$$

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.

a) Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
[1,25 punts]

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t. Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f, la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108\ u^2$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Aplicarem l'equació: $y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$.

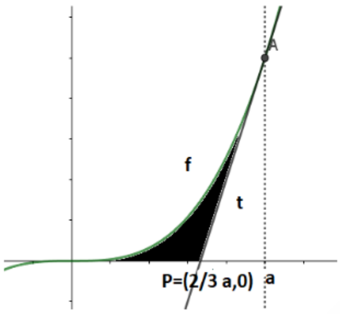
Com que $f(x): y = x^3$, $f(a) = a^3$, $f'(x) = 3x^2$, així que $f'(a) = 3a^2$

i tindrem $y = 3a^2 \cdot (x-a) + a^3 \rightarrow \boxed{t: y = 3a^2x - 2a^3}$.

El punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses ($y = 0$) és:

$0 = 3a^2 \cdot x - 2a^3 \rightarrow x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$, així que el punt de tall és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}a, 0\right)}$.

b)



L'àrea que ens demanen és la regió ombrejada de la figura i es pot calcular fent l'àrea limitada per la funció f, entre $x = 0$ i $x = a$, menys l'àrea del triangle format per la recta tangent t i l'eix d'abscisses entre $x = \frac{2}{3}a$ i $x = a$.

$A_T = \int_0^a x^3\,dx - A_{triangle} = \left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^a - \frac{\left(a - \frac{2}{3}a\right) \cdot a^3}{2} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12}$,

així que $\frac{a^4}{12} = 108 \rightarrow a^4 = 1296 \rightarrow \boxed{a = 6}$

Observació: També es pot calcular mitjançant la integral

$$A_T = \int_0^{\frac{2}{3}a} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}a}^{a} \big(f(x) - t(x)\big)dx.$$