1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudieu la concavitat de la funció.
[0,75 punts]

c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a.
[1 punt]

Solució:

a)

Com que $f'(x) = 3x^2 - 12x$, integrant tenim que $f(x) = x^3 - 6x^2 + C$, on C és una constant real.

Ara bé, sabem que $f(x)$ talla l'eix d'abscises en $x = 1$, per tant, $f(1) = 0$. Substituïm:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0 \ \rightarrow C = 5$$

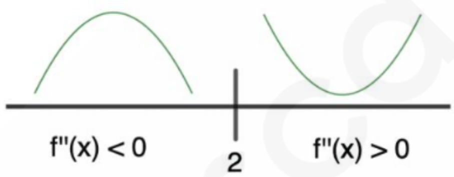
I obtenim $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$.

b)

En el punt d'inflexió s'anul·larà la derivada segona:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \ \rightarrow x = 2$$

Per estudiar la concavitat de $f(x)$, estudiarem el signe de la derivada segona:



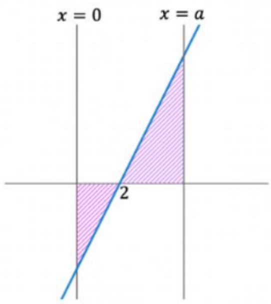
A l'esquerra del punt $x = 2$ la derivada segona és negativa i a la dreta del punt $x = 2$ la derivada segona és positiva.

Per tant:

- En el punt $(2, f(2))$ hi ha un punt d'inflexió.
- La funció té concavitat negativa o és còncava cap avall a l'interval $(-\infty, 2)$
- La funció té concavitat positiva o és còncava cap amunt a l'interval $(2, +\infty)$

c)

La funció $f''(x) = 6x - 12$ talla l'eix d'abscises en $x = 2$ i l'enunciat ens diu que $a > 2$, fets que s'hauran de tenir en compte en el càlcul de les integrals definides:



$$15 = \int_0^2 (12 - 6x)dx + \int_2^a (6x - 12)dx$$

$$15 = [12x - 3x^2]_0^2 + [3x^2 - 12x]_2^a$$

$$15 = 24 - 12 + 3a^2 - 12a - 12 + 24$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0 \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Com que $a > 2$, només hi ha una solució: $\boxed{a = 3}$.

Observació: el plantejament de l'àrea també es pot fer a partir de la suma de les àrees dels dos triangles de la figura i no fent esment de cap càlcul integral.

4. ***a)*** Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt (0, 5), que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

b) Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval (0, 4). Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1,5 punts]

Solució:

a)

De la funció g tenim la informació següent: $g(0) = 5$, $g'(1) = 0, g''(x) = 2x + 1$.

Per tant, sabem que $g'(x) = x^2 + x + m$ on m és una constant real. Com que $g'(1) = 0$ deduïm que $m = -2$. Aleshores $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + n$ on n és una constant real. Com que $g(0) = 5$ deduïm que $n = 5$. Així tenim que

$$\boxed{g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5}$$

Observació: També és totalment correcte el plantejament inicial de

$g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i imposant les condicions obtenir els valors respectius de *a*, *b*, *c* i *d*.

b)

La funció f és polinòmica i, per tant, contínua i derivable a tots els nombres reals. Comprovem fàcilment que $\boxed{f(2) = 0}$ i per tant $x = 2$ és una arrel de la funció.

Per comprovar si és estrictament creixent a l'interval indicat calculem la funció derivada $f'(x) = -3x^2 + 12x$, que s'anul·la per a $x = 0$ i $x = 4$.

Com que es tracta d'una paràbola amb coeficient principal negatiu deduïm que la derivada és estrictament positiva en l'interval $(0,4)$ i, per tant, que la funció f és estrictament creixent en aquest interval. Això implica que la funció f no té més arrels en aquest interval i per tant l'àrea A demanada es pot calcular amb l'expressió següent:

$$\boxed{A =} \left| \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx \right| + \left| \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_0^2 \right| + \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_2^4 \right| = 20 + 20 = \boxed{40\ \mathrm{u}^2}.$$

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.

***a*)** Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
[1,25 punts]

***b*)** Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t. Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f, la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108\ u^2$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Aplicarem l'equació: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

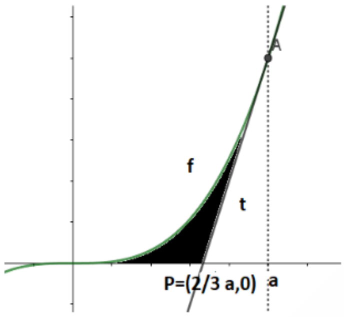
Com que $f(x): y = x^3$, $f(a) = a^3$, $f'(x) = 3x^2$, així que $f'(a) = 3a^2$

i tindrem $y = 3a^2 \cdot (x - a) + a^3 \ \rightarrow \boxed{t: y = 3a^2x - 2a^3}$.

El punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses $(y = 0)$ és:

$0 = 3a^2 \cdot x - 2a^3 \ \rightarrow \ x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$, així que el punt de tall és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}a, 0\right)}$.

b)



L'àrea que ens demanen és la regió ombrejada de la figura i es pot calcular fent l'àrea limitada per la funció f, entre $x = 0$ i $x = a$, menys l'àrea del triangle format per la recta tangent t i l'eix d'abscisses entre $x = \frac{2}{3}a$ i $x = a$.

$A_T = \int_0^a x^3 \, dx - A_{triangle} = \left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^a - \frac{\left(a - \frac{2}{3}a\right) \cdot a^3}{2} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12}$,

així que $\frac{a^4}{12} = 108 \ \rightarrow a^4 = 1296 \ \rightarrow \boxed{a = 6}$

Observació: També es pot calcular mitjançant la integral

$$A_T = \int_0^{\frac{2}{3}a} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}a}^{a} \left(f(x) - t(x)\right)dx.$$

6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b), sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.

Esquema del programa	*Exemple*
1. Escriure «Introduïu un valor a»	L'usuari introdueix $a = 0,5$
2. Escriure «Introduïu un valor b»	L'usuari introdueix $b = 2$
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$»	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0,5) * f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) * (1,25 + \ln(1,25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1,25$
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0,00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: *a* / *b* inici: 0,5 / 2 iteració 1: 0,5 / 1,25 iteració 2: 0,5 / 0,875 iteració 3: 0,5 / 0,6875 iteració 4: 0,5 / 0,59375 iteració 5: 0,546875 / 0,59375 iteració 6: 0,546875 / 0,5703125 iteració 7: 0,55859375 / 0,5703125 […]
7. Quan $f(a) - f(b) < 0,00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c» i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»

a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

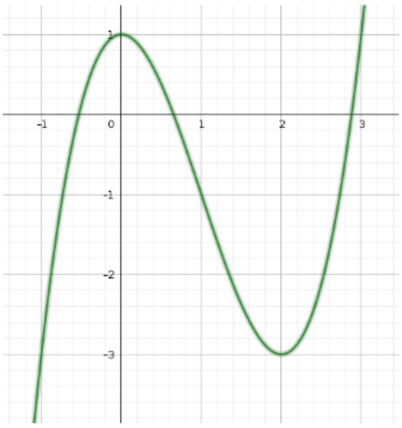
Per a que el programa pugui trobar una solució a una equació *f*(*x*) = 0 entre *a* i *b* cal que la funció *f*(*x*) compleixi el teorema de Bolzano, és a dir que la funció sigui contínua en [*a*, *b*] i que *f*(*a*) i *f*(*b*) siguin de signe diferent, és a dir que *f*(*a*)·*f*(*b*) < 0. En aquest cas el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel dins l'interval (*a*, *b*).

En l'exemple concret en el que s'ha aplicat el programa, podem veure que la funció $f(x) = x + ln(x)$ és contínua en l'interval [0,5, 2] ja que és la suma de dues funcions contínues en aquest interval, concretament una funció polinòmica de primer grau i la funció logarítmica que és contínua en tot el seu domini $Dom(ln(x)) = (0, +\infty)$. Veiem també què $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ la qual cosa demostra que existeix una solució de l'equació en [0,5, 2].

El que fa el programa és trobar el punt mig *c* entre els valors *a* i *b*, i buscar en quin interval canvia de signe la funció; si ho fa a l'interval [*a*, *c*] el que fa és prendre com a nou valor de *b* el punt mig *c*, i d'aquesta manera tenim un nou interval [a,b] que torna a complir el teorema de Bolzano, ja que la funció canvia de signe i és contínua en aquest nou interval. En el cas en que el canvi de signe es produeixi a l'interval [*c*, *b*], el que es fa és prendre com a nou valor *a* el punt mig *c*. En aquest cas també teniu un nou interval [*a*, *b*] que compleix el teorema de Bolzano. En un i en l'altre cas reduïm a la meitat l'amplada de l'interval inicial. Repetint aquests passos diverses vegades aconseguirem apropar tant com es vulgui els valors de *a* i *b* obtenint així una aproximació de l'arrel que, pel teorema de Bolzano, està garantida en aquest interval.

b)

Les funcions polinòmiques són continues, per tant, només necessitem trobar entre quins valors es troben les arrels. Una possibilitat seria començar a fer una taula de valors exhaustiva fins trobar alguns valors en els que la funció canvia de signe i a partir d'aquí contestar la pregunta, però la millor manera de trobar els valors entre els que hi ha solució, i estar segur de que aquesta solució és única és fer una taula de comportament identificant els seus extrems relatius, en aquest cas $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$ d'on veiem que $x = 0$ i $x = 2$.



Fent una taula de comportament:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, +\infty)$
f	creix	1	decreix	-3	creix
f '	+	0	-	0	+

Aquesta taula de comportament ens indica que el polinomi tindrà una arrel entre 0 i 2, ja que en aquest interval la funció és contínua i canvia de signe, i també hi haurà una solució abans de 0 i després de 2. Com que en aquestes tres intervals la funció és monòtona (la derivada ja no canvia de signe) l'arrel serà única en cada un dels intervals. Ara només cal trobar un valor anterior a 0 i un posterior a 2 en els que la funció canviï de signe.

Per exemple per a $x = -1$, $f(-1) = -3 < 0$ i per a $x = 3$, $f(3) = 1 > 0$.

Com a conclusió el programa podrà trobar tres solucions, una en cada un dels intervals $[-1,0]$, $[0,2]$ i $[2,3]$.