2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{cases}$$

***a*)** Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,5 punts]

***b*)** Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $a=2$.
[1 punt]

Solució:

a)

La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc, es calcula $det(A)$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4a^2 + 6 + 2 - 3a - a - 16 = 4a^2 - 4a - 8$$

que s'anul·la per als valors de $a = -1$ i $a = 2$.

A continuació s'estudien els tres casos: $a = -1$, $a = 2$ i $a \neq -1, 2$.

CAS $a = -1$

S'obté el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

On s'observa que sumant la primera més la segona equació s'obté la tercera per tant, el $rang\ (A)$ i el $rang\ (A')$ no seran màxims:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Com que sabem que $det(A) = 0$ i tenim que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores el $rang(A) = 2$.

Com que de la suma de la primera més la segona equació s'obté la tercera, tots els menors d'ordre 3 seran nuls, i per al menor d'ordre dos no nul anterior, $rang(A') = 2$.

També es pot argumentar que el $rang(A') < 3$ a partir de trobar que els determinants d'ordre corresponent són nuls.

Per tant, es té que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites.

Per tant $\boxed{\text{és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb } 3-2=1 \text{ grau de llibertat}}$.

CAS $a = 2$

En aquest cas, s'obté el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

I en notació matricial s'obté

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

On s'observa que la primera i la segona columna, dels coeficients de les x i les y, i el vector dels termes independents són iguals. Això ja ens diu que el rang de la matriu ampliada serà el mateix que el de la matriu de coeficients.

Per $a = 2$ sabem que el $det(A) = 0$, i com que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el $rang(A) = 2$.

Respecte a la matriu ampliada s'observa que no es podrà trobar cap determinant d'ordre 3 no nul ja que el vector de termes independents coincideix amb la primera i segona columna de la matriu A. I, per tant, es té que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant, $\boxed{\text{és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb } 3-2=1 \text{ grau de llibertat}}$.

CAS $a \neq -1$ i $a \neq 2$

Sabem que $det(A) \neq 0$, per tant, $rang\ (A) = rang\ (A') = 3 =$ nombre d'incògnites i $\boxed{\text{és un sistema compatible determinat (SCD)}}$.

b)

Per a $a = 2$, s'ha de resoldre el sistema que ja sabem que serà SCI:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fem la diferència de les dues primeres equacions i obtenim que $z = 0$.

Substituïm $z = 0$ i ens queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On s'observa que les tres equacions són equivalents i, per tant, es confirma que és un sistema compatible indeterminat.

Si prenem $y = \lambda$, obtenim que les solucions del sistema són de la forma: $\boxed{(1 - \lambda, \lambda, 0)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.
0,5 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat.
0,75 punts per la solució.

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depèn dels paràmetres a, b i c.

***a*)** Calculeu les matrius $\boldsymbol{X}$ tals que $\boldsymbol{X}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

***b*)** Determineu els valors de a, b i c perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{X}$ sigui $\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punt]

Solució:

a)

Calculem l'expressió de X^2 en funció dels paràmetres i la igualem a la matriu donada:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'aquesta igualtat de matrius en sorgeixen les equacions següents:

$$a^2 = 1 \to a = \pm 1$$

$$b^2 = 1 \to b = \pm 1$$

$$c^2 = 1 \to c = \pm 1$$

$$a + b = 0 \to a = -b$$

$$b + c = 0 \to b = -c$$

Llavors, les solucions per a, b i c són:

$a = 1,\ b = -1,\ c = 1$ i $a = -1, b = 1, c = -1$

És a dir, hi ha dues possibles matrius X:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{ i } \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b)

Només cal imposar que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicant obtenim la següent igual matricial.

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} \\ 0 & b & b - 1 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I igualant terme a terme els elements de la diagonal obtenim

$\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2;\ \ b = 1;\ \ -c = 1 \rightarrow c = -1.$

I també es compleix que $1 - \frac{a}{2} = 0$ per al valor $a = 2$, i $b - 1 = 0$ per al valor $b = 1$.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Observació: De forma alternativa també es pot calcular la matriu inversa X^{-1} i igualar-la a la matriu que ens dona l'enunciat.

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{abc}\begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ -c & ac & 0 \\ 1 & -a & ab \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualant els elements de la diagonal de les dues matrius, tenim que:

$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2;\ \frac{1}{b} = 1 \rightarrow b = 1;\ \frac{1}{c} = -1 \rightarrow c = -1$

I també són certes les igualtats de la resta de termes de fora de la diagonal.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per calcular X^2.
0,25 punts per plantejar el sistema d'equacions que cal resoldre.
1 punt per donar les dues solucions dels tres paràmetres (0,5 per a cada solució).

b) 0,25 punts per plantejar el producte igual a la identitat.
0,25 punts pel producte matricial.
0,25 per plantejar el sistema d'equacions que cal resoldre.
0,25 punts per trobar els valors dels tres paràmetres.

1. Siguin les matrius $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $\boldsymbol{C}^3=\boldsymbol{I}_2$, en què $\boldsymbol{I}_2$ és la matriu identitat d'ordre 2, i deduïu que la matriu $\boldsymbol{C}$ és invertible i que $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^2$. Calculeu $\boldsymbol{C}^{2022}$.
[1,5 punts]

b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_2$.
[1 punt]

Solució:

a)

Efectivament, si multipliquem

$$C^3 = C^2 \cdot C = C \cdot C^2 = C \cdot C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant en multiplicar C per C^2, i a l'inrevés, obtenim la identitat. Amb això provem que la matriu C és invertible i que la seva inversa és C^2

$$C^2 = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular C^{2022}, com que 2022=3·674, $\boxed{C^{2022} =}\ (C^3)^{674} = I_2^{674} = \boxed{I_2}$.

b)

De l'equació $C \cdot X = A - 2 \cdot I_2$, multiplicant ambdós termes per l'esquerra per C^{-1} obtenim:

$$\boxed{X =}\ C^{-1} \cdot (A - 2 \cdot I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ my + (3-m)z &= -6 \\ 2x - y + mz &= 6 \end{aligned}\right\},$$

en què m és un paràmetre real.

***a*)** Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

***b*)** Resoleu el sistema, si és possible, quan $m = 0$ i quan $m = 3$. En cada cas, doneu la posició relativa dels tres plans a $\mathbb{R}^3$.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Per a discutir el sistema d'equacions lineals calculem el determinant de la matriu dels coeficient A, per a calcular-ne el rang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (2m^2 + 2(m-3)) - \big(6m + 2(m-3)\big) = 2m^2 - 6m.$$

$$|A| = 0 \quad \to 2m(m-3) = 0 \quad \to \quad \begin{matrix} m = 0 \\ m = 3 \end{matrix}$$

I per tant podem organitzar la discussió en tres casos.

- Cas I: $\boldsymbol{m \neq 0}$ i $\boldsymbol{m \neq 3}$

  $rang(A) = 3 = rang(A \mid b) =$ nombre d'incògnites i pel Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema és compatible i determinat, amb una sola solució, SCD.

- Cas II: $\boldsymbol{m = 0}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

  La matriu ampliada és:

  $$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim_{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim_{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

  Per tant $rang(A) = rang(A \mid b) = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant és un **SCI** (sistema compatible indeterminat amb 3 -2 =1 variable lliure, té infinites solucions).

- Cas III: $\boldsymbol{m = 3}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

  La matriu ampliada és:

  $$A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim_{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

  I per tant tenim $rang(A) = 2 \neq rang(A \mid b) = 3$. Per tant, tenim un SI (sistema incompatible), no té solució.

b)

- Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, la matriu ampliada és:

$$A\,|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{Recta\ \ r\!: \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 6, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}}$$

Veient els vectors normals dels tres plans: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi 1} = (2,-1,3) \\ n_{\pi 2} = (0,0,3) \\ n_{\pi 3} = (2,-1,0) \end{matrix}$.

Per tant, els tres plans es tallen en la recta r.

- Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$ ja hem vist que el sistema no té solució, és a dir que no hi ha cap punt intersecció dels 3 plans.

  La posició relativa dels tres plans ens la dona els seus vectors normals i els termes independents:

$$A\ |\ b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi 1} = (2,-1,3) \\ n_{\pi 2} = (0,3,0) \\ n_{\pi 3} = (2,-1,3) \end{matrix}$$

així que, com que els vectors $n_{\pi 1}$ i $n_{\pi 3}$ són proporcionals els plans π_1 i π_3 són paral·lels i estan tallats pel pla π_2.