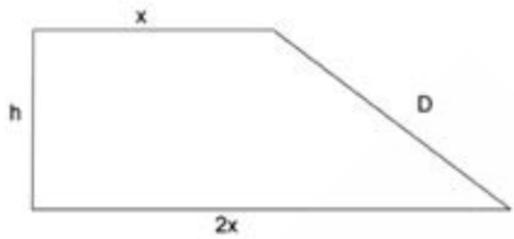
6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h = \dfrac{20}{x}$ i $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$.
[1 punt]

b) Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.
[1,5 punts]

Solució:

a)

L'àrea del trapezi és $A = \frac{3x}{2} \cdot h$ i utilitzant que l'àrea fa 30 m^2 obtenim $\boxed{h = \frac{20}{x}}$.
Observem que podem descomposar el trapezi en un rectangle de base x i altura h i un triangle rectangle d'hipotenusa D i catets x i h. Ara només cal aplicar el teorema de Pitàgores a aquest triangle per obtenir $\boxed{D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$.

b)

Per minimitzar la funció $D(x)$ derivem obtenint

$$D'(x) = \frac{\frac{-800}{x^3} + 2x}{2 \cdot \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = \frac{\frac{-400}{x^3} + x}{\sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$$

Resolem ara l'equació $D'(x) = 0$ o equivalentment $\frac{-400}{x^3} + x = 0$ i obtenim $x^4 = 400$ i, tenint en compte que només podem prendre les solucions positives, l'únic candidat a extrem és $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Ara podem observar que en l'interval $(0, 2\sqrt{5})$ tenim $D'(x) < 0$ i, per tant, D és decreixent i que a l'interval $(2\sqrt{5}, +\infty)$ tenim $D'(x) > 0$ i, per tant, D és creixent, i, per tant, en $x = 2\sqrt{5}$ hi ha un mínim.

Així les dimensions que fan el costat oblic mínim són

$\boxed{x = h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\, m \text{ i } D = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\, m}$.

Observació: Per al càlcul del punt singular, també es pot procedir a derivar la funció $D^2(x) = \frac{400}{x^2} + x^2$, sempre que s'argumenti que tindrà localitzats els extrems en els mateixos valors de les abscisses.

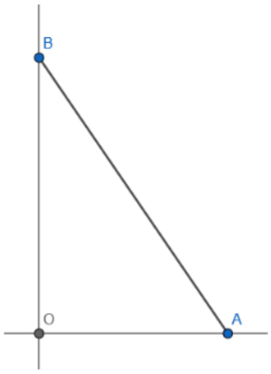
4. A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ i $B = (0, y)$, amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.

***a*)** Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
[1,25 punts]

***b*)** Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
[1,25 punts]

Solució:

a)



Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$Àrea = \boxed{A(x) =} \frac{x(10-x)}{2} = \boxed{\frac{10x - x^2}{2}}$$

$$A'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$$

$$A''(x) = -1$$

$A' = 0$ quan $x = 5$. $A''(5) = -1 < 0$. Per tant, l'àrea és màxima quan $\boxed{x = 5}$.

En aquest cas l'àrea màxima és

$\boxed{A(5) = 25/2 \text{ unitats de superfície}}$.

b)

Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$hipotenusa = \boxed{H(x) =} \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = \boxed{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

$$H'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$H''(x)=\frac{2\sqrt{2x^2-20x+100}-(2x-10)\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}}{2x^2-20x+100}=\frac{2(2x^2-20x+100)-(2x-10)^2}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}=\frac{100}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}$$

$H''(5)>0$ per tant $\boxed{\text{la funció hipotenusa té un mínim quan } x=5}$.

El valor mínim de la hipotenusa serà $\boxed{H(5)=5\sqrt{2}\text{ unitats de longitud}}$.

Observació: L'estudiant també pot optar, de forma justificada, per fer mínima la funció $f(x)=2x^2-20x+100$, prescindint de l'arrel quadrada, fet que simplifica els càlculs. Això és possible atès que la funció arrel quadrada es monòtona creixent, de manera que no es modifiquen els valors de les abscisses on s'assoleixen els màxims i mínims de la funció.

6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b), sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

Esquema del programa	*Exemple*
1. Escriure «Introduïu un valor a»	L'usuari introdueix $a = 0{,}5$
2. Escriure «Introduïu un valor b»	L'usuari introdueix $b = 2$
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$»	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0{,}5) * f(1{,}25) = (0{,}5 + \ln(0{,}5)) * (1{,}25 + \ln(1{,}25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1{,}25$
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: *a* — *b* inici: 0,5 — 2 iteració 1: 0,5 — 1,25 iteració 2: 0,5 — 0,875 iteració 3: 0,5 — 0,6875 iteració 4: 0,5 — 0,59375 iteració 5: 0,546875 — 0,59375 iteració 6: 0,546875 — 0,5703125 iteració 7: 0,55859375 — 0,5703125 […]
7. Quan $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c» i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»

a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.
[1,25 punts]

b) Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b, per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.
[1,25 punts]

Solució:

a)

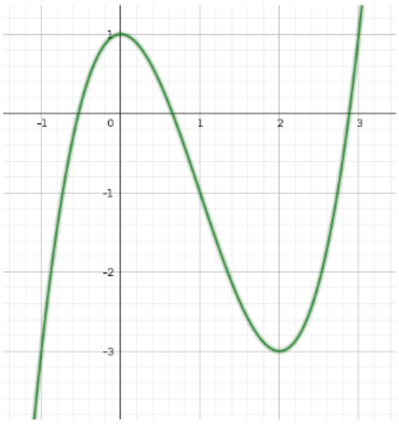
Per a que el programa pugui trobar una solució a una equació *f*(*x*) = 0 entre *a* i *b* cal que la funció *f*(*x*) compleixi el teorema de Bolzano, és a dir que la funció sigui contínua en [*a*, *b*] i que *f*(*a*) i *f*(*b*) siguin de signe diferent, és a dir que *f*(*a*)·*f*(*b*) < 0. En aquest cas el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel dins l'interval (*a*, *b*).

En l'exemple concret en el que s'ha aplicat el programa, podem veure que la funció $f(x) = x + ln(x)$ és contínua en l'interval [0,5, 2] ja que és la suma de dues funcions contínues en aquest interval, concretament una funció polinòmica de primer grau i la funció logarítmica que és contínua en tot el seu domini $Dom(ln(x)) = (0, +\infty)$. Veiem també què $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ la qual cosa demostra que existeix una solució de l'equació en [0,5, 2].

El que fa el programa és trobar el punt mig *c* entre els valors *a* i *b*, i buscar en quin interval canvia de signe la funció; si ho fa a l'interval [*a*, *c*] el que fa és prendre com a nou valor de *b* el punt mig *c*, i d'aquesta manera tenim un nou interval [a,b] que torna a complir el teorema de Bolzano, ja que la funció canvia de signe i és contínua en aquest nou interval. En el cas en que el canvi de signe es produeixi a l'interval [*c*, *b*], el que es fa és prendre com a nou valor *a* el punt mig *c*. En aquest cas també teniu un nou interval [*a*, *b*] que compleix el teorema de Bolzano. En un i en l'altre cas reduïm a la meitat l'amplada de l'interval inicial. Repetint aquests passos diverses vegades aconseguirem apropar tant com es vulgui els valors de *a* i *b* obtenint així una aproximació de l'arrel que, pel teorema de Bolzano, està garantida en aquest interval.

b)

Les funcions polinòmiques són continues, per tant, només necessitem trobar entre quins valors es troben les arrels. Una possibilitat seria començar a fer una taula de valors exhaustiva fins trobar alguns valors en els que la funció canvia de signe i a partir d'aquí contestar la pregunta, però la millor manera de trobar els valors entre els que hi ha solució, i estar segur de que aquesta solució és única és fer una taula de comportament identificant els seus extrems relatius, en aquest cas $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$ d'on veiem que $x = 0$ i $x = 2$.



Fent una taula de comportament:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, +\infty)$
f	creix	1	decreix	-3	creix
f '	+	0	-	0	+

Aquesta taula de comportament ens indica que el polinomi tindrà una arrel entre 0 i 2, ja que en aquest interval la funció és contínua i canvia de signe, i també hi haurà una solució abans de 0 i després de 2. Com que en aquestes tres intervals la funció és monòtona (la derivada ja no canvia de signe) l'arrel serà única en cada un dels intervals. Ara només cal trobar un valor anterior a 0 i un posterior a 2 en els que la funció canviï de signe.

Per exemple per a $x = -1$, $f(-1) = -3 < 0$ i per a $x = 3$, $f(3) = 1 > 0$.

Com a conclusió $\boxed{\text{el programa podrà trobar tres solucions, una en cada un dels intervals } [-1,0],\ [0,2] \text{ i } [2,3]}$.