3. Sigui la recta r definida per l'expressió següent:

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

a) Determineu la posició relativa de la recta r respecte al pla $\pi: x-2y+4z-4=0$. Si és paral·lela, calculeu la distància de r a π, i si és secant, calculeu el punt de tall.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talla la recta r en un punt P, la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Comprovem si la recta r es troba continguda en el pla substituint el punt

$P(2,-1,3) \in r$ en l'equació del pla π: $2-2\cdot(-1)+4\cdot 3-4=12\neq 0$; llavors no està continguda al pla.

Comprovem si la recta és paral·lela al pla. El producte escalar del vector normal al pla i el vector director de la recta hauria de ser nul ja que serien perpendiculars:
$(1,3,1)\cdot(1,-2,4)=1-6+4\neq 0$; llavors no són paral·lels.

Així doncs, $\boxed{\text{la recta } r \text{ és secant al pla } \pi}$.

El punt de tall entre la recta i el pla es pot calcular substituint x, y i z de la recta dins l'equació del pla:

$$(2+\lambda)-2(-1+3\lambda)+4(3+\lambda)-4=0$$

$$2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda-4=0 \rightarrow -\lambda+12=0 \rightarrow \lambda=12$$

El punt de tall és: $(2+12,-1+3\cdot 12,3+12)=\boxed{(14,35,15)}$.

Observació: També es pot plantejar directament el sistema format per la recta i el pla per trobar la intersecció, estudiar-lo i resoldre'l.

b)

L'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talli la recta r en el punt P té per vector director el vector normal al pla: $\vec{v}=(1,-2,4)$.

El punt P ha de satisfer que:

$$2+\lambda=5\cdot(-1+3\lambda) \rightarrow 2+\lambda=-5+15\lambda \rightarrow 7=14\lambda \rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

Llavors el punt P és $(2+1/2,-1+3/2,3+1/2)=(5/2,1/2,7/2)$ i la recta és:

$$\boxed{(x,y,z)=(5/2,1/2,7/2)+\mu(1,-2,4)}$$

S'accepta l'equació de la recta en qualsevol format que també sigui correcte.

5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.

a) Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Per a trobar els tres punts alineats calculem els vectors

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,0,0)$$

i com que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AD}$, els tres punts alienats són: A, B i C.

La recta que defineixen està determinada, per exemple, pel punt $A = (0,0,1)$ i el vector director $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$. Per tant:

$$\boxed{Equació\ contínua:\ r_{AB}: x = y = \frac{z-1}{0}}$$

$$\boxed{Equació\ paramètrica: r_{AB}: \begin{cases} x = k \\ y = k, \qquad k \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$$

b)

Busquem el pla π determinat pels punts A, B i D: el punt A i els vectors directors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ determinen el pla. Si $X = (x, y, z)$ és un punt genèric del pla π tindrem

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant per Sarrus:

$$\pi:\ -(z-1) = 0$$

Per tant l'equació general del pla és: $\boxed{\pi:\ z = 1}$.

Observació: De forma equivalent es pot trobar l'equació a partir del vector normal al pla $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 0, -1)$.