1. Calculeu els coeficients a, b, c i d de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió $(1, 0)$ és $y = -3x + 3$ i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[2,5 punts]

Solució:

1.

Resolució:

Si calculem les funcions derivades successives tenim:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b$

Si anem traduint en termes de *f* i *f'* les condicions de l'enunciat obtenim:

* *f* passa per (1,0) $\rightarrow$ $f(1) = 0$ $\rightarrow$ a + b + c + d = 0 (equació 1)

* (1,0) és un punt d'inflexió $\rightarrow$ $f''(1) = 0$ $\rightarrow$ $6a + 2b = 0$ (equació 2)

* El pendent de la tangent en *x* = *1* és igual a −3 $\rightarrow f'(1) = -3$ $\rightarrow$
$3a + 2b + c = -3$ (equació 3)

* *f* té un extrem en $x = 0$ $\rightarrow$ $f'(0) = 0$ $\rightarrow$ c = 0 (equació 4)

Resolent el sistema format per les equacions (1), (2), (3) i (4), obtenim la solució al problema $\boxed{a = 1, b = -3, c = 0, d = 2}$.

Pautes de correcció:

0,5 punts per la traducció de cadascuna de les quatre condicions.

0,5 punts per la resolució final del sistema.

6. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1}$.

***a*)** Calculeu els valors dels paràmetres a i b si sabem que la gràfica de la funció f té un extrem relatiu en $x=-1$ i passa pel punt $P=\left(-2,\dfrac{13}{5}\right)$.
[1,25 punts]

***b*)** Per al cas $a=b$, calculeu i classifiqueu els extrems relatius de la funció.
[1,25 punts]

Solució:

6.

a)

La funció derivada de $f(x)$ és $f'(x) = \frac{-x^2+(2a-2b)x+1}{(x^2+1)^2}$

Imposem la condició d'extrem relatiu $f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{-1+2b-2a+1}{4} = 0 \rightarrow a = b$

Imposem que la funció passi pel punt $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$

$$f(-2) = \frac{13}{5} \rightarrow \frac{4a-2+b}{5} = \frac{13}{5} \rightarrow 4a + b = 15$$

D'on es dedueix $a = b = 3$

b)

Per $a = b$ la derivada és $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Resolem $f'(x) = 0$ per trobar els possibles extrems relatius i obtenim $x = 1$, $x = -1$.

Com que $f'(-2) < 0,\ f'(0) > 0,\ f'(2) < 0$ deduïm que la funció té un mínim relatiu en $x = -1$ i un màxim relatiu en $x = 1$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel càlcul de la funció derivada.
0,25 punts per imposar la condició d'extrem i trobar una primera condició pels paràmetres.
0,25 punts per imposar que passi pel punt donat i trobar una segona condició.
0,5 punts per trobar els valors dels paràmetres a i b.

b) 0,25 punts per donar la funció derivada en el cas demanat.
0,5 punts per trobar els dos candidats a extrems.
0,5 punts per donar i justificar on fa un mínim i on fa un màxim.