2. Considereu les dues matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.
[1,5 punts]

b) Siguin $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$ dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$. Comproveu que les dues matrius, $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$, són idempotents.
[1 punt]

NOTA: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

Solució:

2.

Resolució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Observació: la resolució es donarà per bona encara que no apareguin els càlculs intermedis.

b) Sabem que $(*)\ C \cdot D = C$ i $(**)\ D \cdot C = D$

$$C^2 = C \cdot C \underbrace{=}_{(*)} (C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C) \underbrace{=}_{(**)} C \cdot D \underbrace{=}_{(*)} C$$

$$D^2 = D \cdot D \underbrace{=}_{(**)} (D \cdot C) \cdot D = D \cdot (C \cdot D) \underbrace{=}_{(*)} D \cdot C \underbrace{=}_{(**)} D$$

I, per tant, efectivament les dues matrius C i D són idempotents.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts pel càlcul del producte A·B.

0,75 punts pel càlcul del producte B·A.

b) 0,5 punts per la comprovació que la matriu C és idempotent.

0,5 punts per la comprovació que la matriu D és idempotent.

4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ.
[1,25 punts]

b) Per al cas $\lambda=-1$, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.
[1,25 punts]

Solució:

4.

Resolució:

a) Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre λ.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Calculem el determinant de la matriu del sistema i estudiem per a quins valors el determinant s'anul·la.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} = 9\lambda^3 + 9 = 9(\lambda^3 + 1)$$

Quan resolem l'equació $9(\lambda^3 + 1) = 0$, obtenim $\lambda^3 = -1$ i d'aquí $\lambda = -1$.

Per tant, tenim dos casos a discutir.

CAS I: $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$

Com que $|M| \neq 0$, aleshores $Rang\ M = 3 = Rang\ \overline{M} = \text{Nombre d'incògnites.}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible determinat (SCD) i, per tant, el sistema té una única solució.

CAS II: $\boldsymbol{\lambda = -1}$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Com que $|M| = 0$, aleshores $Rang\ M < 3$, però en tenir $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 3 \neq 0$, aleshores $Rang\ M = 2$.

D'altra banda, si orlem l'anterior menor, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 3 - 6 = 0$, per tant, $Rang\ \overline{M} = 2$.

Aleshores, com que $Rang\ M = 2 = Rang\ \overline{M} < \text{Nombre d'incògnites} = 3$, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (SCI) amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Observació: de forma alternativa, el primer determinant es podria haver calculat utilitzant les propietats dels determinants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(*)} \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 3+3\lambda & 3+3\lambda & 3+3\lambda \end{vmatrix} = (3+3\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+\lambda)(3\lambda^2 - 3\lambda + 3) = 9(1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$(*)$ *Sumant a la tercera fila les dues primeres files.*

b)

Estudiem el cas $\lambda = -1$.

Sabem que es tracta d'un SCI amb un grau de llibertat i el menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar:

$$\begin{cases} x - 2y &= -z \\ x + y &= 3 + 2z \end{cases}$$

Ara podem resoldre aplicant el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 3+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+6}{3} = z + 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+3z}{3} = z + 1$$

Solució: $\boxed{(x = z+2\ ,\ \ y = z+1,\ \ z \text{ paràmetre})}$

Interpretació geomètrica: cadascuna de les equacions és un pla a $\mathbb{R}^3$. El fet que la solució tingui un grau de llibertat ens indica que aquests tres plans es tallen en una recta, que és la formada per punts de la forma $(z+2, z+1, z)$.

Com que $(z+2, z+1, z) = (2,1,0) + z(1,1,1)$, la recta intersecció és la que passa pel punt $(2,1,0)$ i té vector director $(1,1,1)$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'expressió de les matrius del sistema.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts per tenir el punt singular que anul·la el determinant.

0,25 punts per la discussió del cas $\lambda \neq -1$.

0,25 punts per la discussió del cas $\lambda = -1$.

b) 0,25 punts per la identificació del tipus de solució.

0,25 punts per la resolució de les incògnites *x* i *y* (o les que escaigui).

0,25 punts per l'expressió de la solució del sistema.

0,25 punts per indicar que els tres plans es tallen en una recta.

0,25 punts per identificar la recta solució.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} x-y+kz&=-1\\ x+ky+z&=3\\ 2x+(k-1)y+2z&=2 \end{aligned}\right\},$$

en què k és un paràmetre real.

***a*)** Discutiu el sistema en funció del valor de k.
[1,5 punts]

***b*)** Resoleu el sistema per a $k=0$ i per a $k=1$.
[1 punt]

Solució:

2.

a)

Apliquem el mètode de Gauss, així tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la primera fila, i la fila 3, F3, per F3-2F1, i obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right)$$

Substituïm F3 per F3 -F2 i s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

Distingim casos:

- $k \neq -1, k \neq 1$ tenim rang M = rang MA = número incògnites = 3 i per tant és un sistema compatible determinat (M denota la matriu del sistema i MA la matriu ampliada).

- $k = 1$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Tenim rang M= rang MA= 2 i per tant és un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

- $k = -1$ *obtenim la matriu*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

  Fem un pas més canviant la F3 per F3-F2 i obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

  que correspon a un sistema incompatible ja que rang MA=3 > rang M=2.

b)

Recuperem els càlculs de l'apartat anterior.

Per a $k = 1$ obtenim $y = 2$ i $x = 1 - z$, per tant les solucions són de la forma $(x, y, z) = (1 - z, 2, z)$ o bé forma $(x, y, z) = (x, 2,1 - x)$.

Per a $k = 0$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

I després de fer Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

I, per tant, la solució és $z = 0, y = 4 \; i \; x = 3$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la forma matricial del sistema.
0,5 punts per determinar els diferents casos que cal estudiar, sigui pel mètode de Gauss o pel càlcul de rangs per determinants.
0,75 punts pels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,5 punts per donar les solucions del cas $k = 0$.
0,5 punts per donar les solucions del cas $k = 1$.

5. Considereu la família S de matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, en què $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu totes les matrius de la família S, és a dir, de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquin la igualtat $A^2 = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

Solució:

5.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

Calculem el quadrat d'una matriu de la família $\mathcal{S}$ i imposem que doni la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veiem que cal $2ab = 0$ i $a^2 + b^2 = 1$. Veiem que hi ha 4 solucions: $a = 0 \; i \; b = \pm 1$ i $a = \pm 1, b = 0$. Per tant les 4 matrius possibles són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts pel càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel producte de matrius.

b) 0,5 punts pel càlcul de A^2.
0,25 punts per donar les dues equacions per calcular a i b.
0,5 punts per les quatre matrius que són solució.