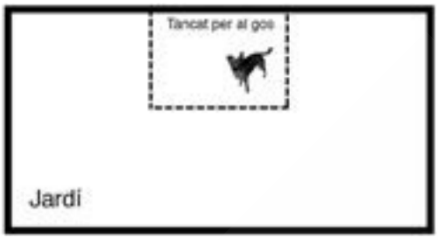
5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m^2 per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.

El preu de la tanca que vol fer servir és de 2,5 €/m.



a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?
[1,75 punts]

b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.
[0,75 punts]

Solució:

5.

Resolució:

a) El tancat té forma de rectangle. Anomenem x a la base del rectangle i y a l'altura. Sabem que l'àrea del tancat és $8\ m^2$, per tant, podem escriure:

$$x \cdot y = 8$$

Aïllant tenim que $y = \frac{8}{x}$.

El cost del tancat és $C(x, y) = 2{,}5 \cdot (2y + x)$. Substituint obtenim:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(2\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16 + x^2}{x}\right)$$

Per calcular el cost mínim, calcularem els extrems relatius de la funció $C(x)$, a partir de la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (16 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm 4$$

Pel context del problema, només té sentit la solució positiva. Per comprovar si en $x = 4$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem el signe:

$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 32x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{32}{x^3}.$$

Com que $C''(4) > 0$, en $x = 4$ hi ha un mínim.

Per tant, les dimensions del tancat seran de $\boxed{4\ m \text{ de base i } 2\ m \text{ d'altura}}$.

El cost serà: $C(4) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16+4^2}{4}\right) = \boxed{20€}$

b) Per estalviar amb la tanca, podem posar el tancat a una cantonada del jardí:

Ara podem reproduir els càlculs fets a l'apartat *a*, amb la nova situació.

En aquest cas, el cost del tancat és $C(x,y) = 2{,}5 \cdot (y + x)$. Com que $y = \frac{8}{x}$:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + x^2}{x}\right)$$

Calculant la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (8 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Anàlogament, l'única solució que té sentit és la positiva. Per comprovar si en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem que el seu signe és positiu:

$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 16x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{x^3}$$

Com que $C''(2\sqrt{2}) > 0$, en $\boxed{x = 2\sqrt{2}}$ hi ha un mínim.

L'altura del tancat serà $\boxed{y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}}$.

Per tant, el tancat tindrà forma quadrada de costat $2\sqrt{2} \approx 2{,}83\ m$.

En aquest cas el preu mínim serà

$$C(2\sqrt{2}) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + (2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{\sqrt{8}} = 2{,}5 \cdot 2\sqrt{8} = 14{,}14€$$

Per tant, tindríem un estalvi de 20 –14,14 = $\boxed{5{,}86\ €}$

Observació: qualsevol altra argumentació correcta serà considerada vàlida, encara que no es faci servir càlcul diferencial per arribar a la resposta, sempre que s'argumenti amb càlculs matemàtics.

Pautes de correcció:

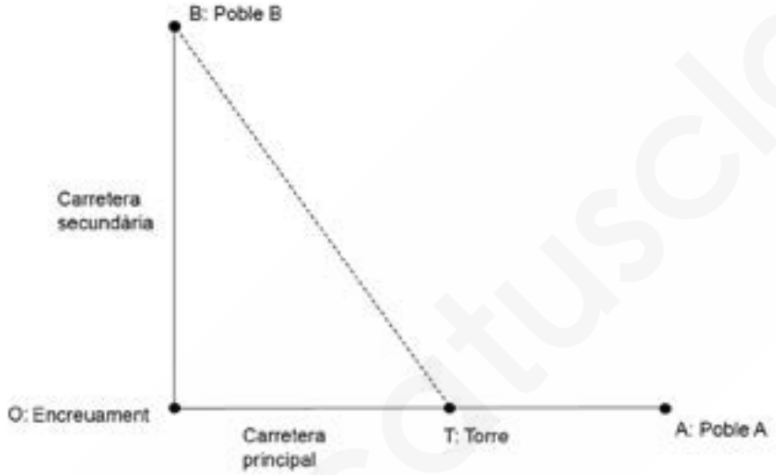
a) 0,25 punts per l'assignació de les variables i la lligadura d'igualtat de l'àrea.
0,25 punts per la funció cost.
0,25 punts per la derivada primera.
0,25 punts per l'abscissa del punt singular.
0,25 punts per argumentar que es tracta d'un mínim.
0,25 punts per les dimensions finals
0,25 punts pel cost mínim.

Observació: a l'hora de trobar el punt singular es pot utilitzar la funció $C(x)$ o bé la funció $f(x) = \frac{16+x^2}{x}$.

b) 0,25 punts per situar el tancat correctament i per la funció cost.
0,25 punts per la derivació, punt singular i justificació de mínim.
0,25 punts per les dimensions i el càlcul de l'estalvi.

4. En una carretera principal hi trobem el poble A. A 12 km del poble A, hi ha un encreuament O amb una carretera secundària que talla perpendicularment la carretera principal. A 9 km de l'encreuament, a la carretera secundària, hi trobem el poble B. Es vol construir una torre de comunicacions T en un punt de la carretera principal situat entre el poble A i l'encreuament O. Aquesta torre ha d'estar connectada amb cadascun dels dos pobles en línia recta per cable. Sabem que instal·lar el cable entre la torre T i el poble B té un preu de 250 €/km i, en canvi, instal·lar el cable entre la torre T i el poble A té un preu de 125 €/km. Determineu a quina distància de l'encreuament O a la carretera principal cal situar la torre T perquè el preu del cablejat sigui mínim i quin serà el valor d'aquest preu mínim.

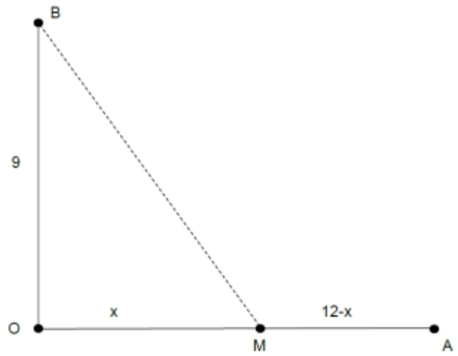
[2,5 punts]



Solució:

4.

Si denotem per x la distància de l'encreuament a la torre, és a dir, $x = d(O, M)$, aleshores obtenim



Pel teorema de Pitàgores veiem que $d(B, M) = \sqrt{81 + x^2}$.

Així doncs el preu del cablejat serà vindrà donat per la funció

$P(x) = 125(12 - x) + 250\sqrt{81 + x^2}$.

Per trobar el preu mínim derivem la funció P:

$$P'(x) = -125 + 250 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}}$$

Resolent $P'(x) = 0$ obtenim $\sqrt{81 + x^2} = 2x$, i elevant les dues bandes al quadrat tenim

$81 + x^2 = 4x^2$, que té com a solució real positiva $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ km. Per comprovar que és un mínim estudiem el signe de la derivada als intervals $(0, 3\sqrt{3})$ i $(3\sqrt{3}, 12)$. En el primer cas $P'(x) < 0$ i en el segon cas $P'(x) > 0$, per tant deduïm que el mínim de la funció P s'assoleix per a $x = 3\sqrt{3}\ km$, és a dir, situant la torre a $3\sqrt{3}\ km = 5{,}2\ km$ de l'encreuament.

Pautes de correcció:

0,5 punts pel plantejament del problema.
0,5 punts per determinar la funció cost que cal optimitzar.
0,5 punts pel càlcul de la derivada primera.
0,5 punts per determinar el candidat a mínim.
0,25 punts per justificar que, efectivament, correspon a un mínim.
0,25 punts pel valor del cost mínim.