3. Sigui $f'(x)=\begin{cases} x-1, & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa pel punt $A=(0,3)$.

a) Calculeu la funció $f(x)$.
[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x=3$.
[1 punt]

Solució:

3.

Resolució:

a) Integrant $f(x)=\begin{cases}\int (x-1)dx & \text{si } x<2\\ \int \frac{1}{x-1}dx & \text{si } x>2\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x+k & \text{si } x<2\\ \ln|x-1|+k' & \text{si } x>2\end{cases}$

Trobem els valors de les constants k i k':

- $f(x)$ passa pel punt $A=(0,3)$, per tant, $\frac{1}{2}0^2-0+k=3 \rightarrow k=3$.
- Com que $f(x)$ és derivable, llavors és contínua, així que ho és en el punt d'abscissa 2 i, per tant, els límits laterals de la funció $f(x)$ en 2 han de coincidir:

$$\frac{1}{2}2^2-2+3=\ln|2-1|+k'$$

$$k'=3.$$

Per tant, la funció $f(x)$ serà $\boxed{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x+3 & si\ x\le 2\\ \ln|x-1|+3 & si\ x>2\end{cases}}$

Observació: es puntuarà per igual l'expressió $\ln|x-1|$ que l'expressió $\ln(x-1)$.

Apliquem l'equació de la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa a:

$$y-g(a)=g'(a)\cdot(x-a)$$

Ara la funció és f' és $g(x)=\begin{cases}x-1 & si\ x\le 2\\ \frac{1}{x-1} & si\ x>2\end{cases}$ i $a=3$.

Cal trobar $g'(x), g'(3)$ i $g(3)$:

$$g'(x)=f''(x)=\begin{cases}1 & si\ x<2\\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si\ x>2\end{cases},\qquad g'(3)=-\frac{1}{4},\qquad g(3)=\frac{1}{2}$$

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-3)\quad\rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel càlcul de les primitives.

0,25 punts pel càlcul de la constant *k*.

0,5 punts per argumentar la continuïtat de la funció *f*.

0,25 punts pel càlcul de la constant *k'*.

b) 0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.

0,25 punts pel càlcul de $f''(x)=g'(x)$.

0,25 punts pel càlcul de $g(3)$ i de $g'(3)$.

0,25 punts pel càlcul final de la recta tangent.

6. Siguin els plans π_1 i π_2, determinats respectivament per les equacions π_1: $x + y = 3$ i π_2: $x - z = -2$.

a) Trobeu l'equació general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_3, que és perpendicular a π_1 i π_2, i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$.
[0,75 punts]

b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2. Calculeu l'equació vectorial de la recta r.
[0,75 punts]

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P.
[1 punt]

Solució:

6.

Resolució:

a) Com que el pla buscat és perpendicular a π_1 i π_2, els seus vectors directors seran els vectors normals de π_1 i π_2: $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ i $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$.

Trobem l'equació general del pla amb vectors directors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ i que passa pel punt $P = (4,1,2)$, en què $X(x,y,z)$ és un punt genèric del pla:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{x - y + z - 5 = 0}$$

b) Busquem la solució del sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$. Aïllant obtenim:

$$\begin{matrix} y = 3 - x \\ z = 2 + x \end{matrix} \rightarrow Si\ x = \lambda, \text{ tenim: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La recta buscada en forma vectorial és:

$$\boxed{r: (x,y,z) = (0,3,2) + \lambda \cdot (1,-1,1), \lambda \in \mathbb{R}}$$

c)

Trobem l'equació del pla perpendicular a la recta r i que passa pel punt P. Aquest és el pla que ens han demanat en l'apartat a: $x - y + z - 5 = 0$.

En cas que no ens adonem que ja tenim el pla d'un apartat anterior, aquest pla tindrà com a vector normal el vector director de la recta. Per tant, serà de la forma:

$x - y + z + D = 0.$

Imposem que P estigui contingut en el pla: $4 - 1 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -5$.

Ara hem de calcular el punt de tall de la recta L i el pla:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{i } x - y + z = 5 \rightarrow \lambda - (3 - \lambda) + (2 + \lambda) = 5 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ en les equacions paramètriques de la recta obtenim el punt : $\boxed{Q = (2,1,4)}$.

De forma alternativa:

El punt Q és la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r, ja que és el punt que està a menor distància de P.

Sigui Q un punt genèric de la recta r: $Q = (\lambda, 3-\lambda, 2+\lambda)$ i $\vec{v} = (1,-1,1)$ el vector director de L.

Per la condició d'ortogonalitat tenim que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(-4+\lambda, 2-\lambda, \lambda) \cdot (1,-1,1) = 0 \rightarrow -4+\lambda - \ 2+\lambda+\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ al punt genèric Q obtenim les coordenades del punt: $\boxed{Q = (2,1,4)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pels vectors directors.

0,25 punts per indicar com trobar el pla.

0,25 punts pel càlcul de l'equació.

b) 0,25 punts per formular la resolució del sistema.

0,5 punts per trobar l'equació.

c) 0,25 punts per indicar que el punt buscat és la projecció ortogonal.

0,25 punts pel punt genèric / per plantejar el sistema entre el pla i la recta.

0,25 punts pel producte escalar / per resoldre el sistema.

0,25 punts per trobar el punt.

1. Considereu les funcions $f(x) = -x^2 + x + 6$ i $g(x) = -9x + 3x^2$.

a) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les dues funcions.
[1,25 punts]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $(-2, 0)$. Representeu aquesta recta tangent i les funcions $f(x)$ i $g(x)$ en uns mateixos eixos de coordenades.
[1,25 punts]

Solució:

1.

a)

Punts de tall: $-x^2 + x + 6 = -9x + 3x^2 \;\rightarrow\; 4x^2 - 10x - 6 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 4\cdot(-6)}}{8} = \frac{10 \pm 14}{8} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comprovem la posició de cadascuna de les corbes:

$A\,(-\frac{1}{2},3)$ comprovem que $f(x) > g(x)$ per a qualsevol $x \in (-\frac{1}{2},3)$

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-x^2 + x + 6 - (-9x + 3x^2))dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} (-4x^2 + 10x + 6)\,dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 + 5x^2 + 6x\right]_{-1/2}^{3} =$$

$$= \left((-36 + 45 + 18) - (\frac{4}{24} + \frac{5}{4} - 3)\right) = \left(27 - (-\frac{19}{12})\right) = \boxed{\frac{343}{12}\,u^2}$$

b)

Calculem la recta tangent a $f(x) = -x^2 + x + 6$ que passa pel punt (-2,0):

El pendent ve donat per la derivada de la funció:

$f'(x) = -2x + 1 \rightarrow f'(-2) = -2x + 1 = -2(-2) + 1 = 5$

I passa pel punt $(-2,0) \;\rightarrow\; f(-2) = 0$

Així la recta tangent serà de la forma:

$y = 5x + n \;\rightarrow\; 0 = 5(-2) + n \;\rightarrow n = 10$

I tenim: $y = 5x + 10$

Per fer la representació gràfica observem que la recta $y = 5x + 10$ passa pels punts $(0,10)$ i $(-2,0)$.

La gràfica de la funció f és una paràbola amb les branques cap avall i el vèrtex en el punt de coordenades:

$f(x) = -x^2 + x + 6 \rightarrow f'(x) = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(-2,0)$ i $(3,0)$ ja que:

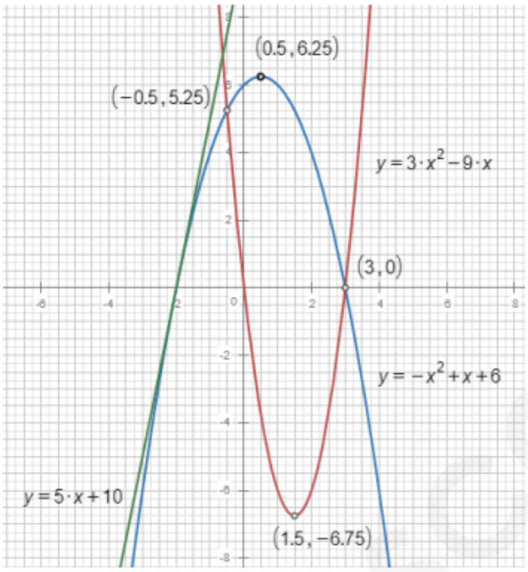
$-x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ i } x = 3.$

La gràfica de la funció g és una paràbola amb les branques cap amunt i el vèrtex en el punt de coordenades:

$g(x) = -9x + 3x^2 \rightarrow g'(x) = -9 + 6x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{4}\right)$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(3,0)$ ja que:

$-9x + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ i } x = 3.$



Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per calcular les abscisses dels punts de tall de les dues funcions.
0,25 punts per plantejar l'àrea demanada com una integral definida.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts per aplicar correctament la regla de Barrow i donar el resultat final.

b) 0,5 punts per l'equació de la recta tangent demanada.
0,75 punts per la representació gràfica de les tres gràfiques, 0,25 punts per la gràfica de la recta i 0,25 punts per cada una de les paràboles.

3. Considereu les rectes a l'espai $r: x = -y = z + m$ i $s: \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$, en què m és un paràmetre real.

a) Estudieu la posició relativa per als diferents valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Calculeu m perquè la distància entre les rectes r i s sigui de $\sqrt{2}$ unitats.
[1,25 punts]

Solució:

3.

a)

Determinem el vector director i un punt de cada recta:

$$r: x=-y=z+m \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,-1,1) \\ P(0,0,-m) \end{cases} \quad s: \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(1,1,0)\times(1,0,-1)=(-1,1,-1) \\ x=1 \Rightarrow Q(1,0,1) \end{cases}$$

Com que $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_s}$ els vectors directors de *r* i *s* són linealment dependents i les rectes seran o bé coincidents o bé paral·leles. Si són coincidents tenen tots els punts en comú, en concret $Q \in s$.

Comprovem si $Q \in r$: $1 \neq -0 = 1+m$

Com que no se satisfà per cap valor de *m*, podem assegurar que les rectes sempre seran paral·leles independentment de *m*.

b)

Calculem la distància entre les dues rectes:

$$d(P,S)=\frac{\left|\overrightarrow{v_s}\times\overrightarrow{PQ}\right|}{|v_s|}=\frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1+m \end{vmatrix}}{\sqrt{3}}=\frac{|(1+m,m,-1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{(1+m)^2+m^2+1}}{\sqrt{3}}$$

Calculem el valor de *m* per tal que sigui $\sqrt{2}$:

$$d(P,S)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1+m)^2+m^2+1}=\sqrt{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow (1+m)^2+m^2+1=6 \Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$$

D'on s'obtenen les solucions $m = 1$ i $m = -2$.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts per determinar que les rectes són coincidents o paral·leles.
0,5 punts per justificar que són paral·leles per tot *m*.

b) 0,75 punts per obtenir correctament la distància entre les dues rectes.
0,5 punts per resoldre correctament l'equació i determinar els dos valors de *m*.